Esame di alcune difficoltà incontrate dagli alunni di quinta liceo scientifico nell'apprendimento dell'Analisi. L'uso di Derive come supporto didattico per una migliore comprensione dei concetti.

Ogni conoscenza è il risultato di una costruzione personale, che implica un momento esplorativo e uno critico. Nel caso della matematica ciò si attua mediante un dialogo fecondo tra intuizione, dimostrazione e confutazione.
M. Pellerey

Introduzione

Il programma di matematica dell'ultimo anno del liceo scientifico è incentrato su una introduzione dell'Analisi. Si studiano limiti, continuità, derivate e integrali di funzioni reali di una variabile reale. Nell'insegnamento di questi concetti si parte molto spesso dall'aspetto intuitivo e da collegamenti con gli argomenti di matematica affrontati gli anni precedenti, si arriva ad una formalizzazione del concetto e poi si affrontano esempi ed applicazioni.
Si cerca, in coerenza con il metodo introdotto nei quattro anni precedenti, di stimolare negli alunni un apprendimento significativo, ragionato, non meccanico e di "far sentire", per quanto sia possibile, come nascono da un punto di vista logico i vari concetti.
Proprio perché si cerca di fare in modo che l'alunno sia coinvolto attivamente nell'apprendimento, è inevitabile e, in un certo senso, positivo che ci siano degli iniziali errori e fraintendimenti. E' anche da una discussione critica di questi errori che l'alunno riesce ad apprendere in maniera più approfondita i concetti, si sente maggiormente motivato a proseguire nello studio ed acquisisce un adeguato metodo di lavoro.
Oltretutto problemi analoghi sembra si presentino anche, ad un livello più alto, nel corso degli studi universitari: «Una delle difficoltà più sentite dagli studenti dei corsi di analisi è, infatti, la capacità di "saltare" dal linguaggio formale dell'analisi, preciso ma intuitivamente "piatto", ai contenuti "intuitivi" che esso rappresenta, che di solito sono esprimibili in italiano. D'altra parte la tensione fra il linguaggio formale e quello naturale, tra la precisione e l'intuizione, sono utilissimi per la comprensione dell'analisi e non solo di quella.» [2]

Elenco alcune delle difficoltà che, in base alla mia esperienza, gli alunni di quinta liceo incontrano con maggiore frequenza.

1) Gli studenti nel cercare di dare significato ai nuovi concetti spesso si formano delle convinzioni errate a causa di *generalizzazioni improprie* di casi particolari studiati in precedenza. Esempi tipici sono il pensare che il grafico di una funzione debba avvicinarsi ad un asintoto orizzontale od obliquo senza attraversarlo (generalizzazione impropria delle proprietà degli asintoti orizzontali ed obliqui delle iperboli o dei rami di iperbole studiati in geometria analitica) e il ritenere che in un punto di massimo o di minimo il grafico della funzione debba avere necessariamente una tangente orizzontale (di nuovo generalizzazioni improprie di funzioni esaminate in geometria analitica: parabole, semicirconferenze ...). E' importante quindi *esplorare* con la classe i nuovi concetti, non pensare che gli alunni gli abbiano compresi dal solo fatto che sanno ripetere una definizione o un teorema o sono in grado di svolgere esercizi di routine.

2) L'*esplorazione dei nuovi concetti* attraverso esempi e controesempi significativi è resa spesso difficile dal fatto che le tecniche di calcolo assorbono quasi completamente l'attenzione dell'alunno: i calcoli possono essere piuttosto dispendiosi a livello di tempo o richiedere tecniche troppo complicate o ancora sconosciute. Il rischio è che lo studente si concentri in questa fase più sui calcoli che sul significato del concetto o che non si possa affrontare l'esame di situazioni interessanti, spesso proposte dagli alunni, a causa dei calcoli che tale esame richiede.

3) Gli alunni sentono la necessità del *controllo dei risultati* per il recupero di eventuali errori. Questo controllo può essere utile dopo preliminare verifica della *consistenza logica dei risultati* stessi e può essere una buona occasione per stimolare gli alunni ad affrontare una nuova fase di ricerca: esaminare se dai risultati sia possibile trarre *nuove conseguenze*, tramite osservazioni a livello intuitivo seguite dalla ricerca di una verifica o confutazione formale (per es. gli elementi dello studio di funzione sembrano indicare una particolare proprietà del grafico? In caso di risposta affermativa, come facciamo a controllare? Oppure: questa funzione presenta alcune caratteristiche. Ne possono trovare un'altra con caratteristiche analoghe?)

Da alcuni anni è possibile utilizzare nell'insegnamento/apprendimento dell'Analisi alcuni programmi informatici. Fra questi *Derive* si segnala per alcuni aspetti (semplicità d'uso, buona affidabilità, poca memoria richiesta, costo contenuto).

L'uso di in programma come *Derive* non risolve ovviamente le difficoltà sopra indicate, ma può favorire a mio giudizio un miglioramento della situazione. Cercherò didimostrare questa affermazione attraverso alcuni esempi molto semplici, dopo una breve presentazione del programma.

Cos'è *Derive*

Derive è un programma che esegue calcoli numerici e simbolici, produce grafici ...
Illustro brevemente solo i comandi del programma che verranno sfruttati nel resto della trattazione.

Author. E' il comando di base e serve per inserire le espressioni. Permette di scrivere espressioni numeriche e letterali utilizzando simboli e convenzioni molto simili a quelle usuali.
Calculus. Imposta il calcolo di derivate, integrali, limiti di funzioni.
Simplify. Semplifica espressioni numeriche e letterali (calcola anche espressioni contenenti derivate, limiti, integrali).
Approx. Approssima con numeri decimali frazioni e numeri irrazionali. E' possibile scegliere il numero di cifre dell'approssimazione.
Solve. Calcola le radici di un'equazione.
Factor. Scompone un'espressione (in campo razionale, reale, complesso).
Expand. Sviluppa un'espressione.
Manage. Con l'opzione *Substitute* permette di sostituire valori (numerici o letterali) a lettere.
Plot. Attiva la finestra grafica e poi esegue il grafico.

Il programma contiene numerose funzioni predefinite.
Le radici di indice dispari sono definite come potenze ad esponente razionale con base positiva. Si può ottenere la funzione su tutto il campo di esistenza con opportuni artifici (ad esempio per ottenere $\sqrt[3]{x}$ si può utilizzare la formula $|x^{1/3}|\,\mathrm{sign}(x)$).
E' possibile inoltre definire nuove funzioni (anche definite a tratti) ed utilizzarle come le funzioni interne.

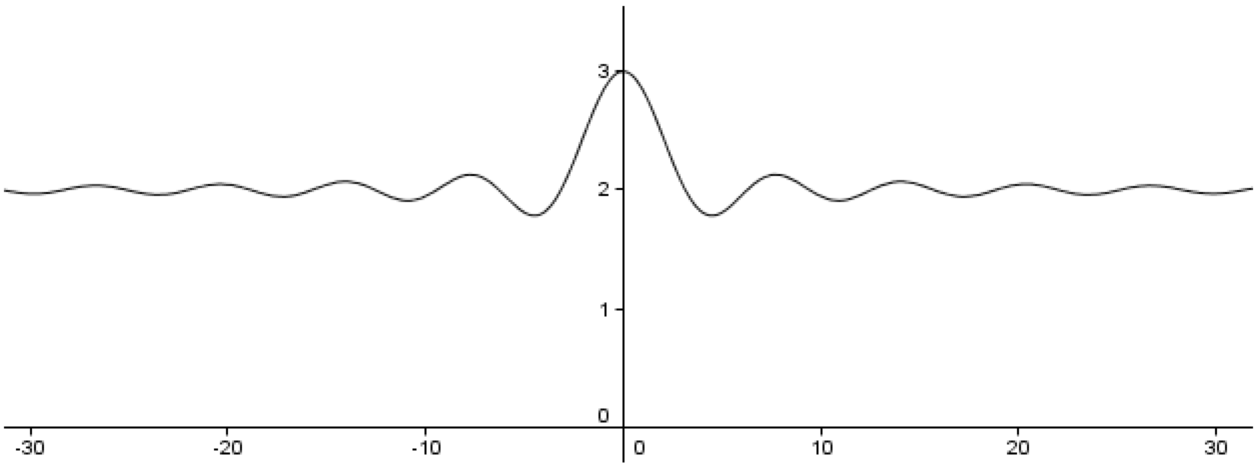
Esempio 1 - Gli asintoti

Si introduce il concetto di asintoto orizzontale con la seguente definizione.
Definizione. La retta di equazione $y=q$ è asintoto orizzontale per la curva di equazione $y=f(x)$ se e solo se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=q \lor \lim_{x\to-\infty} f(x)=q$.

Si osserva naturalmente che gli asintoti dei grafici delle funzioni esponenziali e delle funzioni omografiche studiati gli anni precedenti rispettano le definizione generali sopra riportate. Si presentano inoltre altri esempi di comportamenti asintotici, in particolare casi di grafici che tagliano gli asintoti orizzontali.
In molti studenti tuttavia l'idea intuitiva di asintoto basata sullo studio delle iperboli prevale sulla definizione formale: una retta è un asintoto quando la curva si avvicina ad essa *sempre di più*, *senza tuttavia toccarla*.
Anche quando si fa osservare che la definizione non richiede questo tipo di comportamento i dubbi rimangono. Tipica domanda: *Come fa una curva a tagliare un asintoto?*
Probabilmente questo tipo di dubbio nasconde una non completa comprensione del concetto di limite: lo studente crede che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=q$ valga se e solo $|f(x)-q|$ se è una funzione monotona in un intorno di $+\infty$ che ha 0 come estremo inferiore.
Risulta quindi importante confutare queste idee errate anche attraverso la presentazione e la discussione di opportuni esempi.

Presento un possibile percorso didattico.

• Si inizia con l'esame della funzione $f(x)=2+\frac{\sin(x)}{x}$. E' facile verificare che il suo grafico interseca la retta di equazione $y=2$ infinite volte, nei punti di ascissa $x=k\pi \;\; k\in\mathbb{Z}$. Con un eventuale aiuto dell'insegnante gli alunni dimostrano inoltre che $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$ (teorema del confronto). La retta di equazione $y=2$ è quindi un asintoto in base alla definizione ed è intersecata infinite volte dal grafico.
Derive può, a questo punto, essere utilizzato per controllare i calcoli (in particolare il calcolo del limite), per visualizzare il grafico di $f(x)$ e confrontarlo con l'asintoto.
Da tale esame si può evidenziare come la distanza fra l'asintoto la curva non sia una funzione decrescente, anche se tende a 0 per $x\to\infty$. E' utile visualizzare il grafico della distanza.



Scala *x*:6 *y*:1

• Nell'esempio precedente la funzione "oscilla" passando attraverso l'asintoto. Gli alunni possono facilmente produrre altri esempi simili ($2+\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$; $2+\frac{\sin(x)}{\ln(x)}$ ...).
E' facile costruire anche funzioni che si avvicinano all'asintoto solo dall'alto o dal basso, intersecandolo infinite volte. La funzione $f(x)=2+\frac{|\sin(x)|}{x}$ ha il comportamento indicato e si studia nel modo precedentemente illustrato.

• Lo studente può pensare che i calcoli non siano necessari e che basti esaminare direttamente il grafico costruito con *Derive* per trovare un asintoto e determinare il comportamento reciproco della curva e dell'eventuale asintoto. E' meglio evitare questo fraintendimento facendogli esaminare i grafici delle funzioni

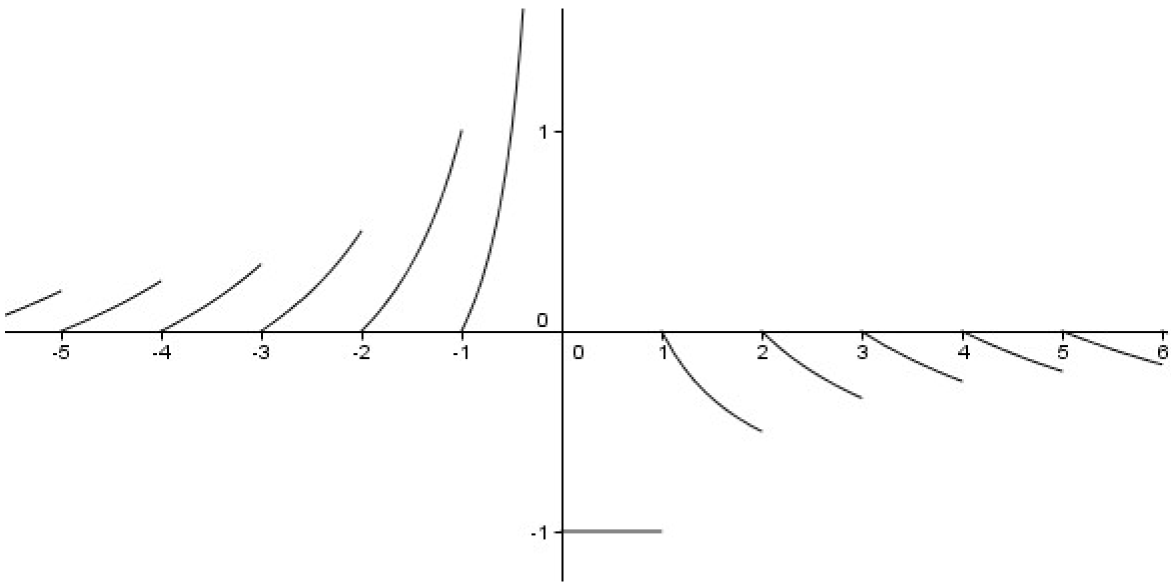
(1) $f(x)=2+e^{-x}\sin(x)$ e $y=2$,

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-100x+2000}{x^2}$ e $y=1$.

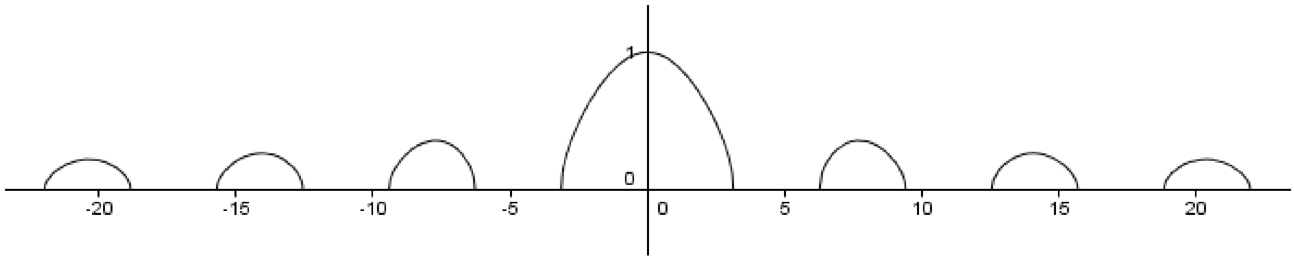
Nel primo caso l'avvicinamento all'asintoto per $x > 5$ è talmente rapido che i due grafici si sovrappongono nella rappresentazione del programma, anche variando la scala.
Nel secondo caso l'avvicinamento all'asintoto è estremamente lento e il comportamento asintotico non può essere "scoperto" dall'esame diretto dei grafici.

Derive è solo uno strumento e, come tale, è utile unicamente se usato in maniera opportuna, con intelligenza e spirito critico.

• E' bene presentare anche qualche funzione con intersezioni non periodiche (per esempio $y=2+\dfrac{\sin(x^2)}{x}$), qualche controesempio (la funzione $y=\dfrac{x^2}{x+10^{10}}+\dfrac{1}{x}$ non ha asintoto orizzontale, anche se la rappresentazione grafica con il computer sembra evidenziare l'asse x come asintoto orizzontale) e qualche funzione "strana" (l'asse delle x è un asintoto per le funzioni $f(x)=\sqrt{\dfrac{\sin(x)}{x}}$ e $g(x)=\dfrac{[x]-x}{x}$? Le rette di equazione $y = 1$ e $y = -1$ sono asintoti per la funzione $h(x)=\text{sign}(\sin(x))$?). Solito controllo dei calcoli e dei grafici con *Derive*.



$g(x)=\dfrac{[x]-x}{x}$ Scala x:2 y:1



$f(x)=\sqrt{\frac{\sin(x)}{x}}$ Scala x:5 y:1

• E' anche interessante che gli studenti più motivati trovino altri esempi e controesempi (un tipo di richiesta può essere: trova una funzione il cui grafico ammetta la retta di equazione $y = 1$ come asintoto e intersechi tale retta in tre punti distinti).

Un percorso didattico analogo a quello sopra indicato può essere svolto riguardo agli asintoti obliqui e a quelli verticali.

Per gli asintoti obliqui è importante fare esempi di funzioni per cui esiste ed è finito $\frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{x}=m$, ma non esiste o è infinito $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]$ e confrontare il comportamento del grafico con il fascio di rette parallele di coefficiente angolare m.
Derive può essere utilizzato per il calcolo dei limiti, per i grafici e per il calcolo delle intersezioni (in particolare di quelle fra il grafico e la generica retta del fascio).

Per gli asintoti verticali è importante produrre esempi che mostrino come il fatto che la retta di equazione $x=x_0$ sia un asintoto per $y=f(x)$ non implica che non esista $f(x_0)$.
La possibilità offerta da *Derive* di definire funzioni definite a tratti risulta in questo contesto molto utile.

(Esempi: $f(x)=IF(x\leqslant 1,2,\frac{1}{(x-2)^2})$; $g(x)=IF(x\leqslant 0.5,-15,e^{\frac{1}{x-0.5}}-15)$)

Esempio 2 - La retta tangente

Anche riguardo al concetto di retta tangente il significato intuitivo (legato alle proprietà delle rette tangenti alle coniche, ai grafici delle funzioni $y=a^x$, $y=\log_a(x)$, $y=\cos(x)$ …) si sovrappone alla definizione formale dell'Analisi (retta tangente come posizione limite della retta secante). Gli studenti spesso pensano che *la retta tangente debba "toccare" la curva nel punto di tangenza, senza attraversare la curva stessa*.

Anche in questo caso è quindi necessario presentare e discutere opportuni esempi.

• Innanzitutto, anche se può sembrare banale, è utile far calcolare agli alunni le equazioni di alcune tangenti ($y=f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$) e visualizzare il grafico della funzione e le tangenti con *Derive*.

• Si può anche esemplificare facilmente con *Derive* il concetto di tangente come limite della secante. Si inserisce l'espressione $r(h):=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)+f(x_0)$ (con x_0 e $f(x)$ fissati) e si visualizzano varie rette per $h\to 0$.

• Si chiede agli studenti di visualizzare con il programma i grafici delle funzioni

(1) $y=\cos(x)-1$

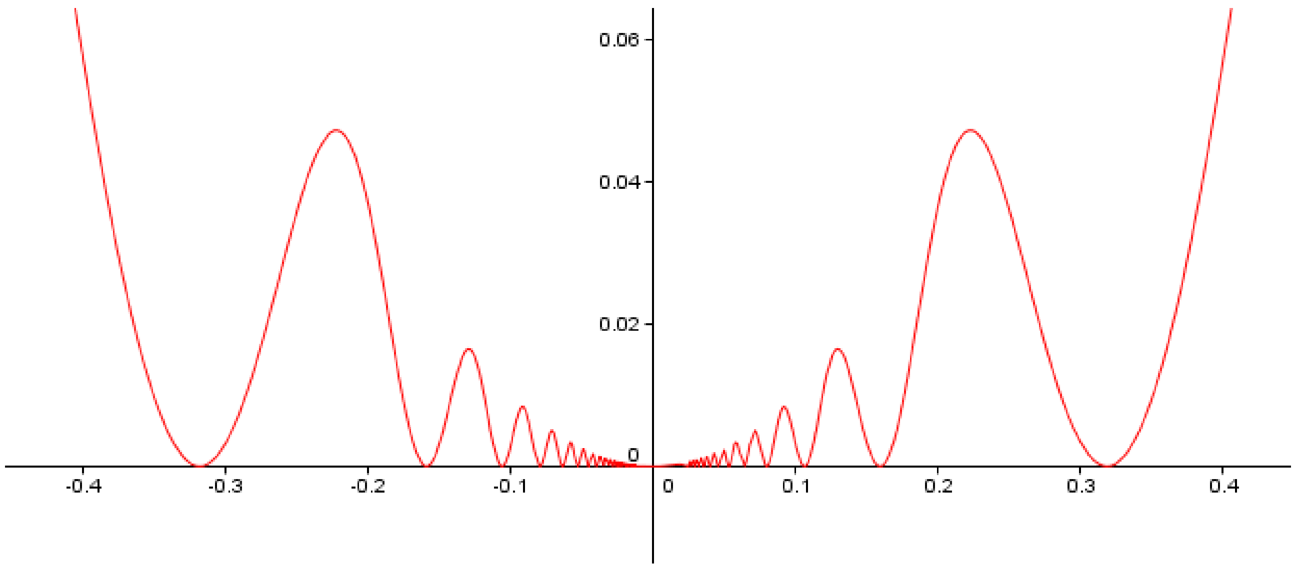
(2) $y=x|x|$

(3) $y=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{se}\, x\neq 0 \\ 0 & \text{se}\, x=0 \end{cases}$

(4) $y=\begin{cases} x^2|(\sin(1/x))| & \text{se}\, x\neq 0 \\ 0 & \text{se}\, x=0 \end{cases}$

(5) $y=\begin{cases} x^2\sin^2(1/x) & \text{se}\, x\neq 0 \\ 0 & \text{se}\, x=0 \end{cases}$

e di dire, in base alla loro intuizione, se l'asse x è tangente nell'origine alle curve rappresentate. (E' necessario scegliere opportune scale per i due assi per evidenziare le caratteristiche del grafico in prossimità dell'origine degli assi.)
Si esamina poi la questione posta applicando la definizione di retta tangente. Si possono controllare i risultati dei limiti con *Derive* e visualizzare in alcuni casi l'asse x come posizione limite della retta secante.



$y=\begin{cases} x^2\sin^2(1/x) & \text{se}\, x\neq 0 \\ 0 & \text{se}\, x=0 \end{cases}$ Scala x:5 y:1

Le funzioni (3), (4) e (5) servono a mostrare come una tangente può intersecare infinite volte la curva in un intorno qualsiasi del punto di tangenza.
Le funzioni (2) e (3) sono esempi di come una curva possa "attraversare" la tangente nel punto di tangenza (la funzione (3) attraversa la tangente infinite volte).
Questi esempi mettono in crisi l'idea intuitiva di tangente. Si possono invitare gli alunni a costruire nuovi esempi e controesempi e ad effettuare il controllo con *Derive*.

• Successivamente si esaminano le funzioni

(1) $|x|$

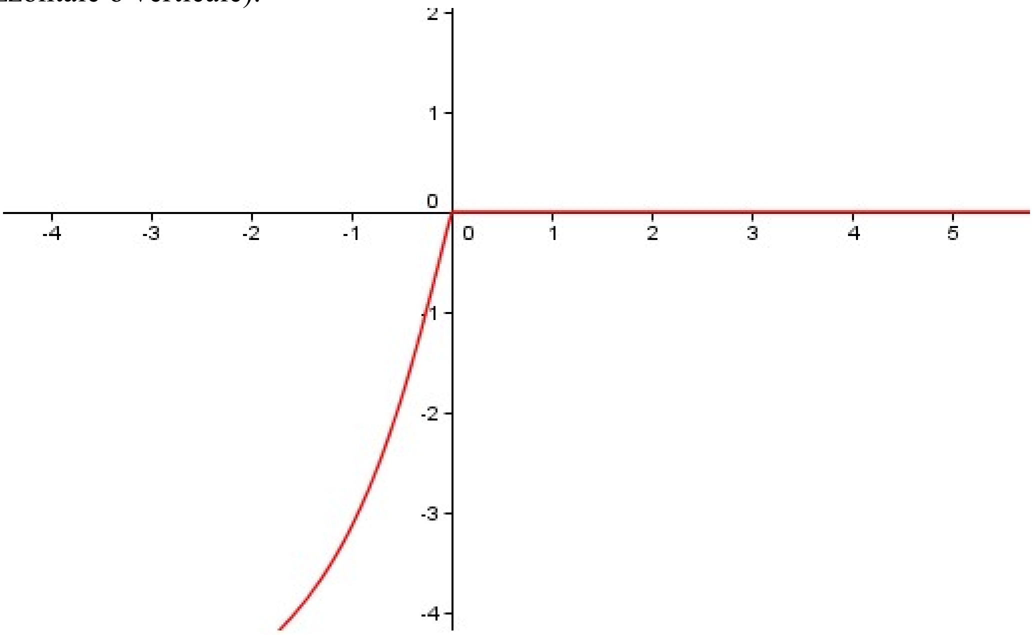
(2) $y=x^2-2|x|$

(3) $y=\sqrt[5]{x^2}$

(4) $y=\sqrt{x^8 2x^6+x^4}$

(5) $y=\arccos(\frac{x^2-1}{x^2+1})+2\arctan(x)-\pi$ (6) $y=\begin{cases} -x & \text{se}\, x\leqslant 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{se}\, x>0 \end{cases}$

e si cercano le tangenti nei punti in cui tali funzioni intersecano l'asse x.
Sia il calcolo della derivata prima, sia la visualizzazione con *Derive* della variazione delle rette secanti portano a concludere che in tali punti non esistono tangenti orizzontali od oblique, ma mostrano anche due tipi diversi di situazioni: punti in cui esistono e sono distinte e non verticali la tangente destra e quella sinistra (*punti angolosi*) e punti a tangenti verticali (*cuspidi*).
Da osservare come le funzioni (5) e (6) presentino nell'origine punti "inconsueti" (con tangente destra orizzontale o verticale).



$y=\arccos(\frac{x^2-1}{x^2+1})+2\arctan(x)-\pi$

• Si può completare la trattazione presentando alcune funzioni con flessi a tangente verticale:

(1) $y=\sqrt[3]{x}$ (2) $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ (3) $y=sign(x^2-x^4)\sqrt[4]{|x^2-x^4|}$

La funzione (2) è un esempio significativo in quanto presenta in x = 0 una cuspide ed in x =1 un punto a tangente verticale e quindi permette di evidenziare la differenza fra cuspide e punto a tangente verticale.

• Gli esempi dei punti angolosi e delle cuspidi possono essere ripresi durante la trattazione dei massimi e minimi locali: sono dei buoni esempi per mostrare come la condizione $f'(x_0)=0$ non sia una condizione necessaria affinché x_0 sia punto di minimo o massimo relativo della funzione $f(x)$.

Conclusioni

I due esempi riportati sono molto semplici e si riferiscono ad una parte piuttosto limitata, anche se importante, del programma di Analisi della quinta liceo scientifico.
Spero comunque di aver mostrato come l'utilizzo di *Derive* all'interno di un insegnamento di tipo

tradizionale possa permettere un arricchimento dell'usuale attività didattica e stimolare un maggior approfondimento dei concetti da parte dell'alunno.
Settembre 1997

Postfazione

Questa tesina è stata scritta nel 1997. Oggi la riscriverei sostituendo all'uso del programma *Derive* quello di *Geogebra*, che presenta numerosi vantaggi, non ultimo quello di essere gratuito e facilmente utilizzabile con la LIM. Molto utile la possibilità di produrre animazioni in maniera molto semplice.
I disegni qui presentati sono stati fatti con *Geogebra* (ho perso i disegni originali!).
Ritengo invece ancora valida la parte didattica e spero che le nuove tecnologie mi permettano di utilizzarla in maniera più organica in classe e di svilupparla ulteriormente.
26/12/11

Bibliografia

[1] Pellerey M., *Esplorazioni di Matematica*, Mursia, Milano, 1985
[2] Gagliardo E., *Analisi Matematica - Con un saggio su "I difficili rapporti fra Analisi e calcolatori"* di Tagliasco V. e Vincenzi A., Muzzio, Padova, 1994.
[3] Bacchelli B., Lorenzi A., Perotti A., *Analisi Matematica con Derive*, Mc Graw Hill, Milano,1992
[4] Toni P., Lamberti P.D., *Esplorando l'Analisi Matematica*, SEI, Torino,1996