Toute quantité négative isolée est un être de raison, incapable de représenter aucune quantité réelle et effective.

L. N. M. Carnot
Géométrie de position
AN XI – 1803
pagg. i-x ; xviij-xix

DISSERTATION PRELIMINAIRE

Le titre de cet ouvrage peut rappeler aux Géomètres, que l'illustre Leibnitz avoit conçu l'idée d'une *Analyse de situation*; idée qui n'a point été suivie, quoiqu'elle mérite l'attention des Savans. « Il est certain, dit d'Alambert, que l'analyse de situation est une chose qui manque à l'algèbre ordinaire: c'est le défaut de cette analyse qui fait qu'un problême paroît souvent avoir plus de solution qu'il n'en doit avoir dans les circonstances limitées où on le considère. Il est vrai que cette abondance de l'algèbre, qui donne ce qu'on ne lui demande pas, est admirable à plusieurs égards; mais aussi elle fait souvent qu'un problême qui n'a réellement qu'une solution, en prenant son énoncé à la rigueur, se trouve renfermé dans une équation de plusieurs dimensions, et par-là, ne peut, en quelque manière, être résolu. Il seroit à souhaiter que l'on trouvât moyen de faire entrer la situation (1) dans le calcul des problêmes; cela les simplifieroit extrêmement pour la plupart; mais l'état et la nature de l'analyse algébrique ne paroissent pas le permettre ». (*Encyclopédie*, art. SITUATION.)

L'objet de cet ouvrage diffère de celui de l'analyse de situation dont on vient de parler; mais il lui est analogue. Leibnitz vouloit qu'on fît entrer dans l'expression des conditions d'un problême géométrique, la diversité de position des partie correspondantes des figures comparées, afin qu'en les séparant par un caractère bien distinctif, on pût les isoler plus facilement dans le calcul. Or cette diversité de position s'exprime souvent par de simples mutations de signes; et c'est précisément la théorie de ces mutations qui fait l'objet essentiel des recherches que j'ai en vue, et que je nomme *Géométrie de position*.

La Géométrie de position est donc, à

Ogni quantità negativa isolata è un ente mentale, incapace di rappresentare alcuna quantità reale ed effettiva

L. N. M. Carnot
Géométrie de position
AN XI – 1803
pagg. i-x; xviij-xix

DISSERTAZIONE PRELIMINARE

Il titolo di ques'opera può ricordare ai Geometri che l'illustre Leibnitz aveva concepito l'idea di una *Analyse de situation*, idea a cui non è stato dato seguito, sebbene meriti l'attenzione degli studiosi. « Certamente – dice d'Alambert – , l'analisi di situazione è una cosa che manca all'algebra ordinaria: è il difetto di quest'analisi che fa sì che un problema sembri spesso avere più delle soluzioni che non deve avere nelle circostanze limitate in cui lo si considera. E' vero che questa abbondanza dell'algebra, che dà quello che non le si domanda, è per molti aspetti mirabile. Tuttavia essa sovente fa anche sì che un problema che, considerando rigorosamente il suo enunciato, ha effettivamente un'unica soluzione, si trovi tradotto in un'equazione di numerose dimensioni e con ciò non può essere, in qualche modo, risolto. Ci si dovrebbe augurare che si trovasse il modo per fare entrare la *situation* (1) nel calcolo dei problemi. Questo nella maggior parte li semplificherebbe moltissimo. Ma lo stato e la natura dell'analisi algebrica non sembrano permetterlo. (*Encyclopédie*, art. SITUATION.)

L'oggetto di questa opera differisce dall'*analyse de situation* di cui ho appena parlato, ma è analogo ad essa. Leibnitz voleva che si facesse entrare nell'espressione delle condizioni di un problema geometrico la diversità di posizione delle parti corrispondenti delle figure paragonate, al fine che separandole mediante un carattere distintivo, le si potesse isolare più facilmente nel calcolo. Questa diversità di posizione si esprime spesso con dei semplici cambiamenti di segno, ed è proprio la teoria di questi cambiamenti che costituisce l'oggetto essenziale delle ricerche che ho in vista, e che chiamo *Geometria di posizione*.

Quindi la geometria di posizione è, propriaproprement parler, la doctrine des quantités dites positives et négatives, ou plutôt le moyen d'y suppléer; car cette doctrine y est entièrement rejetée. Il y a long-temps que l'on a reconnu que plusieurs formules algébriques, dont les termes ne diffèrent que par les signes + et –, expriment souvent, comme on vient de le dire, les propriétés analogues de diverses figures, dont la construction est essentiellement la même, et qui ne diffèrent entre elles que par la transposition des parties correspondantes. C'est à Descartes qu'on doit cette remarque ingénieuse; mais on s'est trompé, ce me semble, en voulant trop en généraliser les conséquences. Je me propose ici de remonter aux principes, et de montrer l'abus qui en peut résulter.

Rien n'est plus simple que la notion des quantités négatives précédées par des quantités positives plus grandes qu'elles; mais en algèbre, on est à chaque instant conduit à des expressions de formes négatives isolées, et lorsqu'on veut savoir au juste le sens de ces expressions, on manque de principes clairs, parce qu'elle son amenées par des opérations qui ne non sont claires elles-mêmes et exécutables, que pour les quantités positives ou plutôt absolues. Aussi les plus grands Géomètres n'ont-ils pu s'accorder sur la véritable signification de ces quantités négatives isolées: on en peut juger par la longue discussion qui s'est élevée d'abord entre Leibnitz et Bernoulli, et ensuite, entre Euler et d'Alembert, sur la question de savoir si les logarithmes de ces quantités sont réels ou imaginaires; et quoique cette discussion soit aujourd'hui terminée, il reste ce paradoxe, savoir que quoiqu'on ait $\log.(-2)^2=\log.(2)^2$, on n'a cependant pas $2\log.-2=2\log.\,2$, comme semble l'exiger la théorie ordinaire des logarithmes. Mais au fond, si l'on ne s'accorde pas sur ce point, c'est qu'on parle de choses qui sont réellement inintelligibles par leur essence. Les opérations algébriques, telles que l'addition, la soustraction, la multiplication, etc. n'ont jamais été démontrées, et ne peuvent l'être véritablement que pour les cas où elles sont exécutables. Ainsi, par exemple, il est aisé de prouver que si $a>b$, on doit avoir $(a-b)c=ac-bc$; mais il est impossible de prouver la même chose lorsque $b>a$, parce qu'il est impossible de concevoir alors ce que c'est que $a-b$, ni $ac-bc$.

mente parlando, la dottrina delle quantità dette positive e negative, o meglio il modo di supplirvi, perché in essa questa dottrina è totalmente respinta. Si è riconosciuto da molto tempo che numerose formule algebriche, i cui elementi differiscono solo per i segni + e –, esprimono spesso, come si è appena detto, le proprietà analoghe di diverse figure, la cui costruzione è essenzialmente la stessa, e che differiscono fra loro solo per la trasposizione delle parti corrispondenti. Dobbiamo a Cartesio questa osservazione ingegnosa. Si è tuttavia sbagliato, mi sembra, volendone generalizzare troppo le conseguenze. Mi propongo qui di riprendere dall'inizio e di mostrare l'abuso che ne può risultare.

Niente è più semplice che la nozione di quantità negative precedute da delle quantità positive più grandi di loro. Tuttavia in algebra si è in ogni istante condotti a delle espressioni di forme negative isolate, e quando si vuole sapere il senso di queste espressioni con esattezza, mancano principi chiari, perché esse sono prodotte da delle operazioni che non sono esse stesse chiare ed eseguibili, se non con delle quantità positive o piuttosto assolute. Anche i più grandi Geometri non si sono potuti accordare sul vero significato di queste quantità negative isolate. Lo si può giudicare dalla lunga discussione che è sorta prima fra Leibnitz e Bernoulli e, in seguito, fra Euler e d'Alembert, sulla questione di sapere se i logaritmi di queste quantità sono reali o immaginari. Sebbene questa discussione sia oggi terminata, resta il paradosso di sapere che sebbene si abbia $\log.(-2)^2=\log.(2)^2$, non si ha pure $2\log.(-2)=2\log.\,2$, come sembra richiedere la teoria ordinaria dei logaritmi. Ma in fondo, se non ci si accorda su questo punto è perché si parla di cose che sono veramente incomprensibili per loro natura. Le operazioni algebriche, come l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione ecc., non sono mai state dimostrate e lo possono essere veramente solo nei casi in cui sono eseguibili. Così, per esempio, è facile da provare che se $a>b$, si deve avere $(a-b)c=ac-bc$, ma è impossibile di provare la stessa cosa quando $b>a$, perché è impossibile di immaginare allora cosa sono $a-b$ e $ac-bc$.

Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudroit retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien: opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée?

D'Alembert, à qui l'on est redevable de s'être particulièrement occupé de la partie philosophique des sciences exactes, a traité cette question à l'article NÉGATIF de l'*Encyclopédie*; il y a ensuite revenu à diverses reprises, particulièrement dans son *Mémoire sur les quantités négatives* insérées dans le huitième volume de ses *Opuscules mathématiques*; et il paroît qu'il avoit à cœur de résoudre les difficultés que présente ce sujet délicat. « Il seroit à souhaiter, dit-il, dans le mémoire dont je viens de parler, que dans les traités élémentaires, on s'appliquât à bien éclaircir la théorie mathématique de ces quantités, ou du moins qu'on ne la présentât pas de manière à laisser dans l'esprit des commençans, des notions fausses ».

Ce grand Géomètre démontre parfaitement dans ce mémoire, sur lequel je reviendrai bientôt, l'insuffisance et le faux des théories ordinaires; mais il ne propose rien pour en tenir lieu; et il se borne à quelques explications particulières dans un sens peu différent de la théorie même qu'il vient de renverser: aussi paroît-il n'être pas entièrement satisfait lui-même de ces explications, puisqu'il ajoute: « Je remarquerai, en finissant, que toute cette théorie des quantités négatives n'est pas encore bien éclaircie ». Le même auteur s'exprime comme il suit dans l'*Encyclopédie*, article NÉGATIF.

« Il faut avouer, dit-il, qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, et que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données …

Quand on considère l'exactitude et la simplicité des opérations algébriques sur les quantités *négatives*, on est bien tenté de croire que l'idée précise qu'on doit attacher aux quantités *négatives*, doit être une idée simple, et n'être point déduite d'une métaphysique alambiquée. Pour tâcher d'en découvrir la vraie notion, on doit d'abord remarquer que les quantités qu'on appelle *négatives*, et qu'on regarde faussement comme au-dessous de zéro,

Per ottenere realmente una quantità negativa isolata, si dovrebbe sottrarre una quantità effettiva da zero, togliere qualche cosa dal niente: operazione impossibile. Come immaginare dunque una quantità negativa isolata?

D'Alambert, a cui si è debitori per essersi occupato paticolarmente della parte filosofica delle scienze esatte, ha trattato di questa questione nell'articolo NÉGATIF de l'*Encyclopédie*. Vi è ritornato in seguito in varie riprese, particolarmente nelle sue *Memoria sulle quantità negative* inserite nell'ottavo volume dei suoi *Opuscules mathématiques*, e sembra che desiderasse molto risolvere le difficoltà che presenta questo delicato argomento. «Sarebbe da augurarsi – egli dice nella memoria di cui ho appena parlato – che nei trattati elementari, ci si applicasse a chiarire bene la teoria matematica di queste quantità, o almeno che non la si presentasse in maniera tale da lasciare delle nozioni false nella mente dei principianti ».

Questo grande Geometra dimostra perfettamente in questa memoria, sulla quale ritornerò fra poco, l'insufficienza e la falsità delle teorie ordinarie, ma non propone niente da sostituirvi. Si limita a qualche applicazione particolare in un senso che differisce poco dalla stessa teoria che ha appena sconvolta. Anche lui non sembra essere interamente soddisfatto da queste spiegazioni, perché aggiunge: « Osservo, infine, che tutta questa teoria delle quantità negative non è ancora bien chiarita ». Lo stesso autore si esprime come segue nell'*Encyclopédie*, article NÉGATIF.

« Bisogna riconoscere – dice – che non è facile stabilire l'idea delle quantità negative, e che alcune brave persone hanno pure contribuito a ingarbugliarla con delle definizioni poco esatte che hanno attribuito […]

Quando si considera l'esattezza e la semplicità delle operazioni algebriche sulle quantità *negative*, si è decisamente tentati di credere che l'idea precisa che si deve attribuire alle quantità *negative*, debba essere un'idea semplice, e non essere dedotta da una metafisica stiracchiata. Per tentare di scoprirne la vera definizione, si deve prima osservare che le quantità dette *negative*, e che si considerano erroneamente come minori dello zero, sono molto spesso rappresentate da sont très-souvent représentées par des quantités réelles, comme dans la géométrie, où les lignes *négatives* ne diffèrent des positives, que par leur situation à l'égard de quelque lignes ou point commun …

Les quantités *négatives* indiquent réellement, dans le calcul, des quantités positives, mais l'on a supposées dans une fausse position. Le signe – que l'on trouve avant une quantité, sert à redreser et à corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypothèse … (2)

Il n'y a donc point réellement et absolument, de quantité négative isolée; -3, pris abstraitement, ne présente à l'esprit aucune idée: mais si je dis qu'un homme a donné à un autre -3 écus; cela veut dire en langage intelligible, qu'il lui a ôté 3 écus. ...

Il n'est pas possible, dans un ouvrage de la nature de celui-ci, de développer davantage cette idée; mais elle est si simple, que je doute qu'on puisse lui en substituer une plus nette et plus exacte; et je crois pouvoir assurer que si l'on l'applique à tous les problêmes que l'on peut résoudre, et qui renferment des quantités négatives, on ne la trouvera jamais en défaut ».

Il semble, d'après ces expressions, que d'Alembert regardoit les quantités négatives comme réelles et prises dans un sens contraire à celui des quantités positives; notion qu'il combat lui-même victorieusement ailleurs, comme nous le verrons bientôt. Néanmoins ce peu de paroles laisse entrevoir une théorie juste, et l'on regrette qu'elle ne soit pas développé davantage dans cet article.

On ne peut douter qu'Euler, toujours clair autant que profond, qui mettoit en œuvre, avec tant de dextérité, les valeurs négatives et imaginaires, et qui même est celui qui, par la subtilité de son analyse, a mis fin à la discussion élevée sur la nature des logarithmes des quantités négatives; on ne peut, dis-je, douter qu'Euler ne fût guidé par une métaphysique sûre. Cependant, dans son *Introduction à l'Analyse infinitésimale, livre II, n°. 3*, il dit que les quantités négatives sont moindres que zéro. Mais il est à présumer que ne voulant pas, dans cet ouvrage, s'occuper spécialement de cet objet, il s'en est tenu à la notion qui se présente le plus naturellement, quoique dénuée d'exactitude. Au

delle quantità reali, come nella geometria, dove le linee negative differiscono da quelle positive solo per la loro posizione riguardo a qualche linea o punto comune. […]

Le quantità negative indicano realmente, nel calcolo, delle quantità positive, ma le si è supposte in una posizione falsa. Il segno – che si trova davanti a una quantità, serve a raddrizzare e correggere un errore che si è fatto nell'ipotesi. (2) […]

Non si hanno quindi realmente e assolutamente delle quantità negative isolate. -3, preso in senso astratto, non presenta alla mente nessuna idea. Tuttavia, se si dice che un uomo ha dato a un altro -3 scudi, questo vuol dire in un linguaggio comprensibile, che gli ha tolto 3 scudi. […]

Non è possibile, in un'opera di questa natura, sviluppare ulteriormente questa idea, ma essa è così semplice che dubito se ne possa sostituire una più netta e più esatta. Credo di poter assicurare che se uno la applica a tutti i problemi che si possono risolvere e che comprendono delle quantità negative, non la si troverà mai in difetto ».

Sembra, secondo queste considerazioni, che d'Alambert consideri le quantità negative come reali e prese in senso contrario a quello delle quantità positive, nozione che contrasta egli stesso vittoriosamente altrove, come vedremo presto. Tuttavia queste poche parole lasciano intravedere una teoria esatta e dispiace che questa non sia stata maggiormente sviluppata in questo articolo.

Non si può dubitare che Eulero, sempre chiaro e profondo, che mise in opera i valori negativi e immaginari con tanta destrezza e che è proprio colui che, per la sottigliezza della sua analisi, pose termine alla discussione sorta sulla natura dei logaritmi delle quantità negative, non si può dubitare – dico – che Eulero non fosse guidato da una metafisica sicura. Tuttavia, nella sua *Introduzione all'Analisi infinitésimale, libro II, n°. 3*, egli dice che le quantità negative sono minori di zero. Ma c'è da presumere che non volendo occuparsi, in quest'opera, in modo particolare di questo argomento, si sia rifatto alla nozione che si presenta in modo più naturale, sebbene mancante d'esattezza. D'altronde, lo surplus, Newton lui-même avoit déjà adopté cette définition dans son arithmétique universelle, probablement par le même motif.

Les notions qu'on a données jusqu'ici des quantités négatives isolées, se réduisent à deux; celle dont nous venons de parler, savoir que ce sont des quantités moindres que zéro, et celle qui consiste à dire, que les quantités négatives sont de même nature que les quantités positives, mais prises dans un sens contraire: d'Alembert détruit l'une et l'autre de ces notions. Il repousse d'abord la première par un argument qui me paroît sans réplique.

Soit, dit-il, cette proportion $1:-1::-1:1$; si la notion combattue étoit exacte, c'est-à-dire, si -1 étoit moindre que 0, à plus forte raison seroit-il moindre que 1; donc le second terme de cette proportion seroit moindre que le premier; donc le quatrième devroit être moindre que le troisième; c'est-à-dire, que 1 devroit être moindre que -1; donc -1 seroit tout ensemble moindre et plus grand que 1; ce qui est contradictoire.

Quant à la seconde des notions données ci-dessus, d'Alembert l'attaque avec le même succès dans son mémoire sur les quantités négatives dont j'au parlé ci-dessus; et cependant, comme il n'a rien à mettre à la place, il semble adopter cette notion pour le fond, et vouloir montrer seulement qu'elle est sujette à diverses exceptions. *Il est*, dit-il, *d'autant plus nécessaire de démontrer cette position* (des quantités négatives en sens contraire des positives) *qu'elle n'a pas toujours lieu*. Mais d'Alembert ne donne pas le moyen de distinguer les cas où l'application de cette règle peut être exacte; et d'après les raisons et les exemples qu'il donne, il est clair qu'elle est tout-à-fait vague ou plutôt absolument fausse. Voici un de ces exemples, aussi simple que frappant, et qui seul suffit pour renverser toute cette doctrine. On en trouvera grand nombre d'autres dans le corps de cet ouvrage.

D'un point *K* pris hors d'un cercle donné, soit proposé de mener une droite *Kmm'*, telle que la portion *mm'* interceptée dans le cercle soit égale à une droite donnée.

Du point *K*, et par le centre du cercle, menons une droite *KAB*, qui rencontre la circonférence en *A* et *B*. Supposons $KA=a$, $KB=b$,

stesso Newton aveva già adottato questa definizione nella sua aritmetica universale, probabilmente per lo stesso motivo.

Le definizioni che si sono date fino a qui delle quantità negative isolate, si riducono a due. Quella di cui abbiamo parlato, cioè che sono delle quantità minori di zero, e quella che consiste nel dire che le quantità negative sono della stessa natura di quelle positive, ma prese in senso contrario. D'Alambert distrugge l'una e l'altra di queste definizioni. Respinge innanzitutto la prima con un argomento che mi sembra senza replica.

Sia data, egli dice, questa proporzione $1:(-1)=(-1):1$. Se la definizione contestata fosse esatta, cioè, se -1 fosse minore di 0, a maggior ragione esso sarebbe minore di 1. Quindi il secondo termine di questa proporzione sarebbe minore del primo. Dunque il quarto termine dovràebbe essere minore del terzo, cioè 1 dovrebbe essere minore -1. Quindi -1 sarebbe contemporaneamente minore e maggiore di 1 e questo è assurdo.

Quanto alla seconda delle definizioni date sopra, d'Alambert l'attacca con lo stesso successo nella sua memoria sulle quantità negative di cui ho parlato prima. Eppure, poiché non ha nulla con cui rimpiazzarla, sembra in fondo adottare questa definizione e voler dimostrare solamente che questa è suscettibile di varie eccezioni. *E' tanto più necessario* – egli dice – *di dimostrare che questa affermazione* (delle quantità negative in senso contrario a quelle positive) *non è sempre vera*. Ma d'Alambert non dà modo per distinguere i casi in cui l'applicazione di questa definizione può essere esatta e secondo i ragionamenti e gli esempi che dà, è chiaro che essa è di fatto vaga o piuttosto assolutamente falsa. Ecco qui uno di questi esempi, tanto semplice quanto sorprendente, e che è da solo sufficiente a sconvolgere tutta questa dottrina. Se ne troveranno molti altri all'interno di questa opera.

Ci si propone di condurre da un punto *K* preso al di fuori di un cerchio dato, una retta *Kmm'*, tale che la parte *mm'* intercettata dentro al cerchio sia uguale a un segmento dato.

Tracciamo dal punto *K* una retta *KAB* passante per il centro del cerchio, che incontra la circonferenza nei punti *A* e *B*. Ponendo

$mm'=c$, $Km=x$, on aura par les propriétés du cercle

$$ab=x(c+x)=cx+xx\ ;$$

donc $xx+cx-ab=0$,

ou $x=-\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}c^2+ab}$.

x a donc deux valeurs: la première, qui est positive, satisfait sans difficulté à la question: mais que signifie la seconde qui est négative? Il paroît qu'elle ne peut répondre qu'au point *m'*, qui est le second de ceux où *Km* coupe la circonférence: et en effet, si l'on cherche directement *Km'*, en prenant cette droite pour l'inconnue x, on aura $x(x-c)=ab$ ou $x=\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}c^2+ab}$, dont la valeur positive est précisément la même que celle qui s'étoit présentée dans le premier cas avec le signe négatif. Donc, quoique les deux racines de l'équation $x=-\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}c^2+ab}$ soient l'une positive et l'autre négative, elles doivent être prises toutes les deux dans le même sens par rapport au point fixe *K*. Ainsi la règle qui veut que ces racines soient prises en sens opposés porte à faux. Si au contraire le point fixe *K* étoit pris sur le diamètre même *AB* et non sur le prolongement, on trouveroit pour x deux valeurs positives, et cependant elles devroient être prises en sens contraire l'une de l'autre. La règle est donc encore fausse pour ce cas.

Si l'on dit que ce n'est pas ainsi qu'il faut entendre ce principe, que les racines positives et négatives doivent être prises en sens opposés, je demanderai comment il faut l'entendre? Et j'en conclurai par-là même, qu'il faut une explication pour empêcher qu'il ne soit pris dans l'acception la plus naturelle, il suit que ce principe est obscur et vague.

$KA=a$, $KB=b$, $mm'=c$, $Km=x$ si avrà per le proprietà del cerchio

$$ab=x(c+x)=cx+xx\ ;$$

quindi $xx+cx-ab=0$,

o $x=-\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}c^2+ab}$.

x ha dunque due valori. Il primo, che è positivo, soddisfa senza difficoltà il quesito. Ma qual è il significato del secondo valore, che è negativo? Sembra che possa riferirsi solo al punto *m'*, che è il secondo punto in cui *Km* taglia la circonferenza. Ed effettivamente, se si cerca direttamente *Km'*, prendendo questo segmento come incognita x, si avrà $x(x-c)=ab$ o $x=\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}c^2+ab}$, il cui valore positivo è esattamente lo stesso che era comparso nel primo caso con il segno negativo. Dunque, sebbene le radici dell'equazione $x=-\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}c^2+ab}$ siano una positiva e l'altra negativa, esse devono essere prese tutte e due nello senso senso in rapporto al punto fisso *K*. Così la regola che vuole che queste radici siano prese in senso opposto porta ad un falso. Se, al contrario, il punto fisso *K* fosse preso sullo stesso diametro *AB* e non sul prolungamento, si troverebbero per x due valori positivi, e tuttavia essi dovrebbero essere presi in senso contrario l'uno rispetto all'altro. Dunque in questo caso la regola è ancora falsa.

Se si dicesse che non è così che si deve intendere questo principio, che le radici positive e negative devono essere prese in senso opposto, allora domanderei come esso si deve intendere? E concluderei che se è necessaria una spiegazione per impedire che esso non sia preso nell'accezione più naturale, ne segue che questo principio è oscuso e vago.

A ces argumens de d'Alembert contre l'une et l'autre des notions données ci-dessus, j'en ajouterai quelques autres qui me paroissent également devoir entraîner la conviction.

Je dis d'abord que la première de ces notions est absurde, et pour la détruire, il suffit de remarquer, qu'étant en droit de négliger dans un calcul les quantités nulles, par comparaison à celles qui ne le sont pas, à plus forte raison devroit-on être en droit de négliger celles qui se trouveroient moindres que 0; c'est-à-dire, les quantités négatives ; ce qui est certainement faux : donc les quantités négatives ne sont pas moindres que 0.

Une multitude de paradoxes, ou plutôt d'absurdités palpables, résulteroient de la même notion; par exemple, -3 seroit moindre que 2, cependant $(-3)^2$ seroit plus grand que 2^2 ; puisque $(-3)^2$ est 9, et que 2^2 n'est que 4; c'est-à-dire, qu'entre ces deux quantités inégales 2 et -3, le carré de la plus grande seroit moindre que le carré de la plus petite, et réciproquement. Ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité.

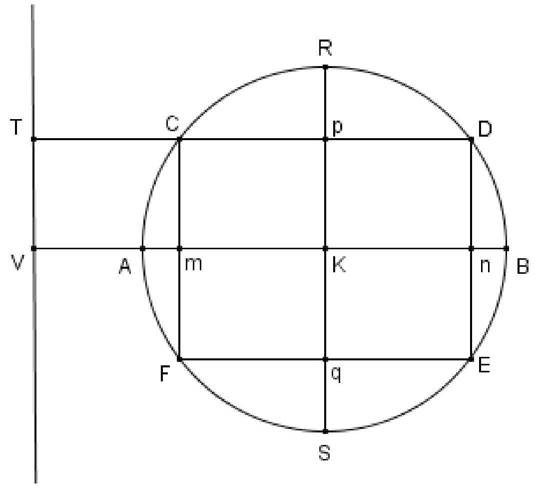
Passons à la seconde notion, qui consiste à dire que les quantités négatives ne diffèrent des quantités positives qu'en ce qu'elles sont prises dans un sens opposé. Cette idée est ingénieuse, mais elle n'est pas plus juste que la précédente. En effet, si deux quantités, l'une positive, l'autre négative, étoient aussi réelles l'une que l'autre et ne différoient que par leurs positions, pourquoi la racine de l'une seroit-elle une quantité imaginaire tandis que celle de l'autre seroit effective? Pourquoi $\sqrt{-a}$ ne seroit-elle pas aussi réelle que $\sqrt{+a}$? Conçoit-on une quantité effective dont on ne puisse tirer la racine carrée? et d'où viendroit le privilége que la première $-a$ auroit de donner son signe au produit $-a\times+a$ de l'une par l'autre? Cette expression de quantités prises en sens contraires l'une de l'autre, est donc au moins déjà très-vague, et mène à une confusion d'idées inextricable. Mais je vais plus loin; je démontre que la notion est complètement fausse, et que de son admission résulteroient les plus grandes absurdités.

A questi argomenti di d'Alambert contro l'una e l'altra delle definizioni date sopra, ne aggiungerei alcuni altri che mi sembrano ugualmente convincenti.

Dico subito che la prima di queste definizioni è assurda e per distruggerla è sufficiente osservare che avendo diritto di trascurare in un calcolo le quantità nulle, in relazione a quelle che non lo sono, a maggior ragione si dovrebbe aver diritto di trascurare quelle che fossero minori di zero, cioè le quantità negative. Questo è certamente falso. Quindi le quantità negative non sono minori di 0.

Dalla stessa definizione di trarrebbero una moltitudine di paradossi, o piuttosto di assurdità evidenti. Per esempio, -3 sarebbe minore di 2, tuttavia $(-3)^2$ sarebbe maggiore di 2^2 ; poiché $(-3)^2$ è 9, e 2^2 è solo 4. Ciò significa che fra due quantità differenti 2 et -3, il quadrato della più grande sarebbe minore del quadrato della più piccola, e reciprocamente. Cosa che urta contro tutte le idee chiare che ci si può fare della quantità.

Passiamo alla seconda definizione, che consiste nel dire che le quantità negative differiscono da quelle positive solo in quanto sono prese in senso opposto. Questa idea è ingegnosa, ma non è più esatta di quella precedente. In effetti, se due quantità, una positiva e l'altra negativa, sono tutte e due reali e differiscono solo per la loro posizione, perché la radice dell'una sarebbe una quantità immaginaria mentre quella dell'altra sarebbe effettiva? Perché $\sqrt{-a}$ non sarebbe reale come $\sqrt{+a}$? Concepiamo una quantità effettiva di cui non si possa estrarre la radice quadrata? E da dove viene il privilegio che la prima $-a$ avrebbe di dare il suo segno al prodotto $(-a)\times(+a)$ dell'una con l'altra? Questa espressione di quantità prese con segno opposto l'una dall'altra è quindi almeno già molto vaga e porta a una confusione di idee inestricabile. Ma vado più lontano. Dimostro che la definizione è completamente falsa e e che ammettendola ne risulterebbero le più grandi assurdità.



Soit une courbe quelconque, un cercle par exemple, ACRDBESF dans le plan duquel soient tracés deux axes AB, RS perpendiculaires entre eux et se coupant au centre K pris pour origine des abscisses. D'un point quelconque C de cette courbe, soit menée l'appliqueée Cp, et prolongeons-la jiusqu'en D. Cela posé, d'après la notion précédente pD, par exemple, étant regardée comme positive, Cp sera négative ; et l'on doit avoir $Cp = – pD$; d'où je tire $Cp + pD$, ou $CD = 0$; résultat absurde. Par la même raison, si du même point C on mène Cm perpendiculaire à AB, et qu'on prolonge cette droite jusqu'en F, on aura $mF = – Cm$; donc $Cm + mF$ ou $CF = 0$; résultat également absurde. De plus, puisqu'on auroit $CD = 0$, $CF = 0$, on auroit aussi $CD \cdot CF = 0$; c'est-à-dire, que l'aire du rectangle $CDEF = 0$, d'où suivroit, par exemple, que le carré inscrit dans un cercle seroit 0. Telles sont les erreurs qui dériveroient invinciblement de la notion précédente. Il est donc faux que Cp soit une quantité négative, et il est aisé de prouver, en effet directement, qu'elle est nécessairement positive ; car si d'un point quelconque V de la droit AB prolongée au-delà de A, on mène une droite VT parallèle à KR, il est évident et avoué par ceux mêmes qui adoptent la notion précédente, que les trois droites TC, Tp, TD qui se trouvent toutes du même côté par le rapport au nouvel axe VT, sont positives : or on a $Cp = Tp – TC$; donc puisque $Tp > TC$, $Tp – TC$, ou Cp, est une quantité positive.

On dira peut-être que Cp est positive par rapport à l'axe TV, et négative à l'égard de l'axe RS. Mais ce seroit une nouvelle énigme à deviner plus difficile encore que la première, et

Sia data una curva qualsiasi, per esempio un cerchio ACRDBESF, nel piano in cui siano tracciati due assi AB ed RS perpendicolari fra loro e che si intersecano nel centro [del cerchio] preso K come origine delle ascisse. Da un punto qualsiasi C di questa curva, sia condotta una corda Cp, e la si prolunghi fino a D. Ciò posto, per la definizione precedente, essendo pD considerato, per esempio, positivo, Cp sarà negativo. Da questo si deduce $Cp + pD$, o $CD = 0$: risultato assurdo. Per la stessa ragione, se dal punto C si traccia Cm perpendicolare ad AB e si prolunga questa retta fino a F, si avrà $mF = – Cm$. Quindi $Cm + mF$ o $CF = 0$, risultato ugualmente assurdo. Inoltre, poiché si avrà $CD = 0$ e $CF = 0$, si avrà anche $CD \cdot CF = 0$, cioè l'area del rettangolo $CDEF = 0$, da cui seguirebbe, per esempio, che il quadrato iscritto nel cerchio sarebbe nullo. Questi sono gli errori che deriverebbero inevitabilmente dalla definizione precedente. E' dunque falso che Cp sia una quantità negativa e, in effetti, è facile provare direttamente che è una quantità necessariamente positiva. Infatti se da un punto qualsiasi V della retta AB prolungata al di là di A, si traccia una retta VT parallela a KR, è evidente e riconosciuto anche da coloro che adottano la definizione precedente, che le tre rette TC, Tp, TD che si trovano tutte dalla stessa parte in rapporto al nuovo asse VT, sono positive. Ora si ha $Cp = Tp – TC$; dunque poiché $Tp > TC$, $Tp – TC$, o Cp, è una quantità positiva.

Forse si dirà che Cp è positivo in rapporto all'asse TV ed è negativo rispetto all'asse RS. Ma ci sarebbe un nuovo indovinello, più difficile ancora del primo e ciò nella scienza il cui cela dans la science dont le caractère principal est l'évidence.

Pour démontrer d'une manière plus sensible encore, comment, par ce principe des quantités négatives prises en sens contraire des quantités positives, on est invinciblement conduit à l'erreur, je reprends l'argument qui prècéde, en lui donnant une nouvelle forme, comme il suit.

Soit d'abord décrit un cercle ARBS, soit K le centre de ce cercle, et menons un diamètre quelconque AB ; nous aurons

AB = AK + KB. (A)

Maintenant par le centre K je mène l'axe RS perpendiculaire à AB, puis par un point quelconque C de la circonférence, je mène la corde CD parallèle à AB, et que je suppose couper l'axe RS au point *p*. Je prends R pour origine des abscisses ; je nomme *x* l'abscisse R*p*, *y* l'ordonnée *p*D, et *a* le rayon. J'aurai donc $yy=2ax-xx$; donc $y=\pm\sqrt{2ax-xx}$; ce qui m'apprend, d'après la théorie admise des quantités négatives prises en sens contraire des quantités positives, que *y* a deux valeurs égales et directement opposées ; l'une *p*D représentée par la racine positive, l'autre C*p* representée par la racine négative, c'est-à-dire que nous avons $p\,\mathrm{D}=+\sqrt{2ax-xx}$ et $\mathrm{C}\,p=-\sqrt{2ax-xx}$; équations qui doivent avoir lieu quelle que soit la valeur de R*p* ou *x*. Supposons donc R*p* = RK ou *x* = *a* ; *p*D deviendra KB, et C*p* deviendra AK ; donc les équations deviendront KB = + *a* et AK = – *a*. Substituant ces valeurs AK, KB dans l'équation (A) trouvée ci-dessus, on aura AB = 0 ; résultat absurde, quoique rigoureusement déduit, ou plutôt précisément parce qu'il est rigoureusement déduit de la théorie des quantités négatives prises en sens contraire des quantités positives. Cette théorie est donc complètement fausse. Il est possible peut-être d'opposer à cela des subtilités métaphysiques ; mais je ne crois pas qu'on puisse y répondre d'une manière claire et propre à satisfaire un esprit géometrique.

Les raisons sur lesquelles on a coutume d'appuyer les deux notions que je vien de combattre, sont d'ailleurs sans consistance par elles-mêmes. Soit, dit-on, une quantité A ; retranchons-en une quantité moindre *a*, la différence A – *a* sera moindre que A. Supposons maintenant que *a* augmente, A – *a* diminuera de

carattere principale è l'evidenza.

Per dimostrare in una maniera ancora più evidente come, dalla nozione di quantità negative prese in senso contrario dalle quantità positive, si è inevitabilmente condotti all'errore, riprendo l'argomento precedente, dandogli una nuova forma, come segue.

Sia dapprima disegnato un cerchio ARBS, sia K il centro del cerchio. Tracciamo un diametro qualsiasi AB. Avremo

AB = AK + KB. (A)

Ora traccio dal centro K l'asse RS perpendicolare ad AB, poi da un punto qualsiasi C della circonferenza traccio la corda CD parallela ad AB, che suppongo tagliare l'asse RS nel punto *p*. Prendo R come origine delle ascisse, chiamo *x* l'ascissa R*p*, *y* l'ordinata *p*D, e *a* il raggio. Avrò dunque $yy=2ax-xx$; quindi $y=\pm\sqrt{2ax-xx}$. Da qui, in base alla supposta teoria delle quantità negative prese in senso contrario a quelle positive, scopro che *y* ha due valori uguali ed opposti. L'uno *p*D rappresentato dalla radice positiva, l'altro C*p* rappresentato dalla radice negativa, cioè abbiamo

$p\,\mathrm{D}=+\sqrt{2ax-xx}$ e $\mathrm{C}\,p=-\sqrt{2ax-xx}$, equazioni che devono sussistere qualunque sia il valore di R*p* o *x*. Supponiamo dunque R*p* = RK o *x* = *a*; *p*D diverrà KB, et C*p* diverra AK; quindi le equazione diverranno KB = + *a* et AK = – *a*. Sostituendo questi valori AK, KB nell'equazione (A) trovata precedentemente, si avrà AB = 0, risultato assurdo, sebbene dedotto in modo rigoroso, o piuttosto in modo preciso perché è dedotto in modo rigoroso dalla teoria delle quantità negative prese in senso contrario da quelle positive. Questa teoria è dunque completamente falsa. E' forse possibile opporre a questa delle sottigliezze metafisiche, ma non credo che vi si possa replicare in una maniera chiara e atta a soddisfare un *esprit géometrique*.

Le motivazioni con le quali si è abituati a sostenere le due definizioni che sto contrastando, sono d'altronde da sole prive di consistenza. Sia data, diciamo, una quantità A. Sottraendole una quantità minore *a*, la differenza A – *a* sarà minore di A. Supponendo ora che *a* aumenti, A – *a* diminuirà sempre più e diventerà 0 quando *a* plus en plus, elle deviendra 0 lorsque a deviendra égal à A ; donc, ajoute-t-on, si a continue d'augmenter, A – a se trouvera moindre que 0.

Mais pour montrer que ce raisonnement est vicieux il suffit de faire voir qu'on pourroit l'appliquer également à $\sqrt{A-a}$. En effect, A étant donné, $\sqrt{A-a}$ diminue graduellement à meseure que a augmente ; elle devient 0 lorsque a devient égal à A ; donc elle devroit devenir moindre que 0, c'est-à-dire, simplement négative et non imaginaire lorsque a devient plus grand que A. Ce qui est faux.

On peut opposer le même raisonnement à ceux qui disent que les quantités négatives sont prises en sens opposé aux positives ; car par la même raison que A – a est prise, tantôt dans le sens contraire, suivant que a est moindre ou plus grande que A ; on prouveroit que $\sqrt{A-a}$ doit être prise aussi tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, et n'être jamais imaginaire.

[…]

Je conclus, 1°. que *toute quantité négative isolée est un être de raison, et que celles qu'on rencontre dans le calcul, ne sont que de simples formes algébriques, incapables de représenter aucune quantité réelle et effective.* 2°. *Que chacune de ces formes algébriques étant prise, abstraction faite de son signe, n'est autre chose que la différence de deux autres quantités absolues, dont celle qui étoit la plus grande dans le cas sur lequel on a établi le raisonnement, se trouve la plus petite dans le cas auquel on veut appliquer les résultats du calcul*.

Ce principe répond à tout, et lève toute espèce de difficulté, sans qu'il soit besoin de faire intervenir ces notion abstraites sur lesquelles les Géomètres ne peuvent s'accorder. En effet, en revenant aux idées simples et intelligibles, ce qui se présentera naturellement à l'esprit, est qu'il ne peut exister réellement d'autres quantités que celles qu'on nomme absolues, et que les signes dont elles peuvent être précédées, n'indiquent point des quantités, mais des opérations. Ainsi ces signes, pris collectivement avec ces mêmes quantités, ne forment pas des quantités nouvelles, mais des formes algébriques complexes.

diventerà uguale ad A. Quindi, diciamo, se a continua ad aumentare, A – a si troverà ad essere minore di 0.

Tuttavia, per mostrare che questo ragionamento è sbagliato, è sufficiente far vedere che si potrebbe ugualmente applicarlo a $\sqrt{A-a}$. In effetti, dato A, $\sqrt{A-a}$ diminuisce gradualmente secondo quanto aumenta a. Diventa uguale a 0 quando a diventa uguale ad A. Quindi dovrebbe diventare minore di 0, cioè, semplicemente negativo e non immaginario quando a diventa maggiore di A. E questo è falso.

Si può opporre lo stesso ragionamento a quelli che dicono che le quantità negative sono prese in senso opposto a quelle positive, perché per la stessa ragione che A – a sia preso in senso contrario, secondo che a sia minore o maggiore di A, si proverebbe che anche $\sqrt{A-a}$ deve essere preso ora in un senso, ora nell'altro, e non essere mai immaginario.

[…]

Concludo: 1° *che ogni quantità negativa isolata è un ente mentale e che quelle che incontriamo nei calcoli solo unicamente delle semplici forme algebriche, incapaci di rappresentare alcuna quantità reale ed effettiva*. 2° *Che ciascuna di queste forme algebriche, prese fatta astrazione dal segno, è solo la differenza di due altre quantità assolute, di cui quella che è la maggiore nel caso di cui si è fatto il ragionamento, si trova [ad essere] la minore nel caso al quale si vuole applicare il risultato del calcolo.*

Questo principio risponde a tutto, e toglie ogni tipo di difficoltà, senza che ci sia bisogno di far intervenire quelle nozioni astratte sulle quali i Geometri non possono accordarsi. In effetti, ritornando alle idee semplici ed intellegibili, quello che si presenterà naturalmente allo spirito è che non possono esistere realmente altre quantità che quelle che chiamiamo assolute e che i segni di cui esse possono essere precedute, non indicano delle quantità, ma delle operazioni. Così questi segni, presi collettivamente insieme alle stesse quantità, non formano delle nuove quantità, ma delle forme algebriche complesse.

Dire d'une quantité qu'elle devient négative, c'est donc employer une expression impropre et capable d'induire en erreur, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus; et le vrai sens qu'on doit attacher à cette expression, est que cette quantité absolue, n'appartient point au système sur lequel les raisonnemens on été établis; mais à un autre qui se trouve avec le premier dans une certaine relation; telle que pour lui rendre applicables les formules trouvées pour ce premier système, il est nécessaire d'y changer de + en – le signe qui la précède.

(1) Situation, en Géométrie & en Algèbre, signifie la position respective des lignes, surfaces, &c. (*Encyclopédie*, art. SITUATION.) [NdR]

(2) Imaginons, par exemple, qu'on cherche la valeur d'un nombre x, qui, ajouté à 100, fasse 50, on aura, par les règles de l'Algèbre, $x + 100 = 50$, & $x = -50$; ce qui fait voir que la quantité x est égale à 50, & qu'au lieu d'être ajoutée à 100, elle doit en être rentrachée ; de sorte qu'on auroit dû énoncer le problême ainsi : trouver une quantité x qui, étant retranchée de 100, donne 50 pour reste ; en énonçant le problême ainsi, on auroit $100 - x = 50$, & $x = 50$; la forme *négative* de x ne subsisteroit plus. Ainsi, les quantités *négatives* indiquent réellement, dans le calcul, des quantités positives, mais qu'on supposées dans une fausse position. Le signe – que l'on trouve avant une quantité, sert à redresser et à corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypothèse, comme l'exemple ci-dessus le fait voir très-clairement.
(*Encyclopédie*, art. NÉGATIF.) [NdR]

Dire che una quantità diventa negativa, è quindi impiegare un'espressione impropria e capace di indurre in errore, come si è visto sopra. Il vero senso che si deve attribuire a questa espressione, è che questa quantità assoluta non appartiene al sistema sul quale è stato stabilito il ragionamento, ma ad un altro che si trova in una certa relazione con il primo, tale che per rendere ad esso applicabile le formule trovate per il primo sistema, è necessario cambiare da + a – il segno che precede tale quantità.

(1) Situation, in Geometria e in Algebra, significa la posizione rispettiva delle linee, delle superfici, ecc. (*Encyclopédie*, art. SITUATION.) [NdR]

(2) Immaginando, per esempio, che si cerchi il valore di un numero x che, aggiunto a 100, faccia 50, si avrà, per le regole dell'Algebra, $x + 100 = 50$, e $x = -50$. Questo fa vedere che la quantità x è uguale a 50 e che, invece di essere aggiunta a 100, ne deve essere sottratta, di modo che si sarebbe dovuto enunciare il problema così: trovare una quantità x che, tolta da 100, dia 50 come resto. Enunciando così il problema, si avrebbe $100 - x = 50$, e $x = 50$: la forma negativa di x non comparirerebbe più. Le quantità negative indicano realmente, nel calcolo, delle quantità positive, ma le si è supposte in una posizione falsa. Il segno – che si trova davanti a una quantità, serve a raddrizzare e correggere un errore che si è fatto nell'ipotesi, come questo esempio fa vedere chiaramente.
(*Encyclopédie*, art. NÉGATIF.) [NdR]