www.mathematice.it

COME TROVARE IL DOMINIO DI UNA FUNZIONE

Ebook con spiegazioni, esempi,

numerosi esercizi

con risoluzione commentata

Mariairene Guagnini

Prima edizione: gennaio 2014

Sito web: www.mathematice.it

Contatti: redazione@mathematice.it

INDICE

SCHEMA GENERALE

CONDIZIONI DI ESISTENZA

FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

indice

● funzioni polinomiale. Nessuna condizione

esempi: x^3-4x+8 ; $y=-4x^4-\sqrt{3}x+\pi$; $f(x)=\dfrac{3x-2}{\sqrt[3]{5}-1}$

Esistono per ogni valore reale di *x*.

● funzioni razionali fratte. Condizione esistenza: denominatore $\neq 0$

esempio : $y=\dfrac{2x-3}{2-5x}$. Condizione di esistenza: $2-5x\neq 0 \rightarrow x\neq\dfrac{2}{5}$

● radici di indice pari. Condizione esistenza: radicando ≥ 0

esempio : $f(x)=\sqrt{2x+3}$. Condizione di esistenza: $2x+3\geq 0\rightarrow x\geq -\dfrac{3}{2}$

● radici di indice dispari. Nessuna condizione

esempio : $y=\sqrt[5]{2x+3}$. Esiste per ogni valore reale di *x*.

● valore assoluto. Nessuna condizione

esempio : $y=|4-x^2|$. Esiste per ogni valore reale di *x*.

- esponenziali a base costante maggiore di zero. Nessuna condizione

esempio : $y = 2^x$. Esiste per ogni valore reale di *x*.

- esponenziali a base variabile. Condizione esistenza: base > 0

esempio : $y = (x-2)^{(x^2-3x)}$. Condizione di esistenza: $x-2>0 \rightarrow x>2$

- logaritmi a base costante positiva e diversa da 1. Condizione esistenza: argomento > 0

esempio : $f(x) = \log_2(5x+\sqrt{3})$. Condizione di esistenza: $5x+\sqrt{3}>0 \rightarrow x>-\frac{\sqrt{3}}{5}$

- logaritmi a base variabile. Condizioni di esistenza: argomento > 0 ∧ base > 0 ∧ base ≠ 1.

esempio : $y = \log_{x-2} x$.

Condizioni di esistenza: $\begin{cases} x>0 \\ x-2>0 \\ x-2\neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>2 \\ x\neq 3 \end{cases} \rightarrow 2<x<3 \vee x>3$

- seno, coseno. Nessuna condizione

esempi : $f(x) = \sin(2x+\pi)$ $y = \cos(3x)$. Esistono per ogni valore reale di *x*.

- tangente (con argomento in radianti).

Condizione di esistenza: $\text{argomento} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ (cioè $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

esempio: $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Condizione di esistenza: $2x+\frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{6}+k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

● cotangente (con argomento in radianti).

Condizione di esistenza: $\text{argomento} \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ (cioè $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

esempio: $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Condizione di esistenza: $2x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi \rightarrow 2x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow x \neq -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

● arcoseno, arcocoseno. Condizioni di esistenza $-1 \leq \text{argomento} \leq 1$ cioè $\begin{cases} \text{argomento} \geq -1 \\ \text{argomento} \leq 1 \end{cases}$

esempio: $\arcsin(3-x)$

Condizioni di esistenza $\begin{cases} 3-x \geq -1 \\ 3-x \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x \geq -4 \\ -x \leq -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 2 \end{cases} \rightarrow 2 \leq x \leq 4$

● arcotangente, arcocotangente. Nessuna condizione.

esempio : $y = \arctan(3-x)$. Esiste per ogni valore reale di x.

COME SI TROVA IL DOMINIO DI UNA FUNZIONE

ALCUNE INDICAZIONI

indice

Il dominio (campo di esistenza / insieme di definizione) di una funzione $f(x)$ è l'insieme dei valori x per cui esiste la funzione.

Generalmente si deve trovare il dominio di una funzione formata a partire da più funzioni base.

Esempi: $y=\sin x+\ln x$ (somma di due funzioni)

$y=\ln(\sin x)$ (composizione di due funzioni)

● Casi frequenti

Funzione	Dominio della funzione
$f(x)\pm g(x)$	Dominio $f(x)$ $\cap$ Dominio $g(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	Dominio $f(x)$ $\cap$ Dominio $g(x)$
$k\cdot f(x)$ con $k\neq 0$	Dominio $f(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	Dominio $f(x)$ $\cap$ Dominio $g(x)$ $\cap$ $\{x\in\mathbb{R}: g(x)\neq 0\}$

● **Funzioni composte**.

Occorre analizzare la funzione come negli esempi seguenti.

Esempio 1. $y=\sqrt{\ln x}$

Lo schema di composizione è $x \overset{logaritmo}{\rightarrow} \ln x \overset{radice}{\rightarrow} \sqrt{\ln x}$.

Le condizioni di esistenza sono $\begin{cases} x>0 & \text{esistenza logaritmo} \\ \ln x \geq 0 & \text{esistenza radice} \end{cases}$

Esempio 2. $y=\ln(\arcsin x)$

Lo schema di composizione è $x \overset{arcoseno}{\rightarrow} \arcsin x \overset{logaritmo}{\rightarrow} \ln(\arcsin x)$.

Le condizioni di esistenza sono $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 & \text{esistenza arcoseno} \\ \arcsin x > 0 & \text{esistenza logaritmo} \end{cases}$

● **Consigli importanti.**

(1) Non modificare la funzione senza aver prima posto tutte le condizioni di esistenza.

Esempio 3: il dominio della funzione $f(x)=\log(x-2)+\log(x+3)$ è $D=(2;+\infty)$.

Se, prima di trovare il dominio, applico la prima proprietà dei logaritmi ottengo $f(x)=\log[(x-2)(x+3)]$ e posso erroneamente pensare che il dominio sia $D=(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$

(2) Scrivere prima, con cura, tutte le condizioni di esistenza e solo successivamente svolgere i calcoli relativi a tali condizioni.

● **Esempi**

Esempio 5. $\log(3x)+\sqrt{2-x}$

La funzione data è la somma di due funzioni: il logaritmo e la radice quadrata.

$$\begin{cases} 3x>0 & \text{esistenza logaritmo} \\ 2-x\geq 0 & \text{esistenza radice} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ -x\geq -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\leq 2 \end{cases} \rightarrow 0<x\leq 2$$

NB. Attenzione agli " = " .

Esempio 6. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{x^2-3x}$

La funzione data è il rapporto di una radice quadrata e di un polinomio

$$\begin{cases} 3-x\geq 0 & \text{esistenza radice} \\ x^2-3x\neq 0 & \text{esistenza frazione} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ x\neq 0 \wedge x\neq 3 \end{cases} \rightarrow x>3$$

Esempio 7. $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-5}}$

La funzione data è la radice quadrata di una frazione.

$$\begin{cases} \dfrac{3-x}{x-5}\geq 0 & \text{esistenza radice} \\ x-5\neq 0 & \text{esistenza frazione} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\leq x<5 \\ x\neq 5 \end{cases} \rightarrow 3\leq x<5$$

Osservazione sulla definizione di dominio

Nella ricerca del dominio occorre fare attenzione al caso in cui la funzione ha delle limitazioni nella definizione.

Esempio 8.

E' data la funzione $\begin{cases} f(x)=x^2-4x \\ 1\leq x<3 \end{cases}$. Il polinomio esiste sempre, ma ci sono le condizioni aggiuntive nella definizione della funzione. Quindi il dominio è $D=[1;3)$.

ESERCIZI DI BASE

indice

Svolgere da ciascuno dei seguenti esercizi, controllando i risultati e gli svolgimenti proposti dal testo.

1) $y=\sqrt[3]{x^2-4}$	risultato esercizio 1	svolgimento esercizio 1
2) $y=\sqrt{x}-\sqrt{2-x}$	risultato esercizio 2	svolgimento esercizio 2
3) $\frac{2-x}{\sqrt{x+3}}$	risultato esercizio 3	svolgimento esercizio 3
4) $y=\sqrt{2-\sqrt{1-x}}$	risultato esercizio 4	svolgimento esercizio 4
5) $y=\sin\sqrt[4]{x}$	risultato esercizio 5	svolgimento esercizio 5
6) $y=\frac{\sin x}{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$	risultato esercizio 6	svolgimento esercizio 6
7) $y=\tan(x-4)$	risultato esercizio 7	svolgimento esercizio 7
8) $y=\lvert\sin x\rvert$	risultato esercizio 8	svolgimento esercizio 8
9) $y=\frac{\sqrt{x}}{\lvert x-2\rvert}$	risultato esercizio 9	svolgimento esercizio 9
10) $y=\ln(x^2-3x)$	risultato esercizio 10	svolgimento esercizio 10
11) $y=\cot(\pi x)$	risultato esercizio 11	svolgimento esercizio 11
12) $\arccos(x^2-3)$	risultato esercizio 12	svolgimento esercizio 12

RISULTATI DEGLI ESERCIZI DI BASE

indice

Risultato esercizio 1

La funzione $y=\sqrt[3]{x^2-4}$ esiste per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$. $D=\mathbb{R}$.

svolgimento esercizio 1 esercizi di base

Risultato esercizio 2

La funzione $y=\sqrt{x}-\sqrt{2-x}$ esiste per $0 \leq x \leq 2$. $D=[0;2]$.

svolgimento esercizio 2 esercizi di base

Risultato esercizio 3

La funzione $\dfrac{2-x}{\sqrt{x+3}}$ esiste per $x>-3$. $D=(-3;+\infty)$.

svolgimento esercizio 3 esercizi di base

Risultato esercizio 4

La funzione $y=\sqrt{2-\sqrt{1-x}}$ esiste per $-3 \leq x \leq 1$. $D=[-3;1]$.

svolgimento esercizio 4 esercizi di base

Risultato esercizio 5

La funzione $y=\sin\sqrt[4]{x}$ esiste per $x \geq 0$. $D=[0;+\infty)$.

svolgimento esercizio 5 esercizi di base

Risultato esercizio 6

La funzione $y=\dfrac{\sin x}{\cos(2x-\frac{\pi}{4})}$ esiste per $x\neq\frac{3}{8}\pi+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. $\mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{8}\pi+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\}$

svolgimento esercizio 6 esercizi di base

Risultato esercizio 7

La funzione $y=\tan(x-4)$ esiste per $x\neq 4+\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. $\mathbb{R}\setminus\{4+\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$

svolgimento esercizio 7 esercizi di base

Risultato esercizio 8

La funzione $y=|\sin x|$ esiste per ogni valore di $x\in\mathbb{R}$. $D=\mathbb{R}$.

svolgimento esercizio 8 esercizi di base

Risultato esercizio 9

La funzione $y=\dfrac{\sqrt{x}}{|x-2|}$ esiste per $0\leq x<2\vee x>2$. $D=[0;2)\cup(2;+\infty)$.

svolgimento esercizio 9 esercizi di base

Risultato esercizio 10

La funzione $y=\ln(x^2-3x)$ esiste per $x<0\vee x>3$. $D=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

svolgimento esercizio 10 esercizi di base

Risultato esercizio 11

La funzione $y=\cot(\pi x)$ esiste per $x \neq k,\ k \in \mathbb{Z}$. $D=\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

svolgimento esercizio 11 esercizi di base

Risultato esercizio 12

La funzione $\arccos(x^2-3)$ esiste per $-2 \leq x \leq -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} \leq x \leq 2$.

$D=[-2;-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2};2]$.

svolgimento esercizio 12 esercizi di base

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI DI BASE

indice

Svolgimento esercizio 1

La funzione $y=\sqrt[3]{x^2-4}$ è la radice cubica di un polinomio. Il polinomio non ha condizioni di esistenza; la radice cubica è di indice dispari e quindi non presenta condizioni di esistenza. Il dominio (campo di esistenza / insieme di definizione) è quindi formato da tutti i numeri reali. $D=\mathbb{R}$.

esercizi di base

Svolgimento esercizio 2

Per la funzione $y=\sqrt{x}-\sqrt{2-x}$ dobbiamo prendere in esame l'esistenza delle due radici quadrate:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ -x\geq -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq 2 \end{cases} \rightarrow 0\leq x\leq 2 \rightarrow D=[0;2] \quad .$$

esercizi di base

Svolgimento esercizio 3

Per la funzione $\dfrac{2-x}{\sqrt{x+3}}$ dobbiamo prendere i esame l'esistenza della radice quadrata e il fatto che il denominatore deve essere diverso da zero:

$$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ \sqrt{x+3}\neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x+3\neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x\neq -3 \end{cases} \rightarrow x>-3 \rightarrow D=(-3;+\infty) \quad .$$

esercizi di base

Svolgimento esercizio 4

Per la funzione $y=\sqrt{2-\sqrt{1-x}}$ dobbiamo considerare l'esistenza delle due radici quadrate:

$$\begin{cases}1-x\geq 0\\ 2-\sqrt{1-x}\geq 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-x\geq -1\\ -\sqrt{1-x}\geq -2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x\leq 1\\ \sqrt{1-x}\leq 2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x\leq 1\\ 1-x\leq 4\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x\leq 1\\ -x\leq 3\end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases}x\leq 1\\ x\geq -3\end{cases} \rightarrow -3\leq x\leq 1 \rightarrow D=[-3;1] \ .$$

esercizi di base

Svolgimento esercizio 5

Per la funzione $y=\sin\sqrt[4]{x}$ l'unica condizione che dobbiamo considerare è quella dell'esistenza della radice (perché ha indice pari): $x\geq 0$. $D=[0;+\infty)$.

esercizi di base

Svolgimento esercizio 6

Per la funzione $y=\dfrac{\sin x}{\cos(2x-\frac{\pi}{4})}$ l'unica condizione è quella del denominatore diverso da zero (seno e coseno esistono perché hanno come argomento un polinomio):

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0 \rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \rightarrow 2x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \rightarrow$$

$$2x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \rightarrow x\neq\frac{3\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{8}\pi+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\} \ .$$

esercizi di base

Svolgimento esercizio 7

Per la funzione $y = \tan(x-4)$ dobbiamo prendere in esame l'esistenza della tangente:

$x-4 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \rightarrow x \neq 4 + \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{4 + \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

esercizi di base

Svolgimento esercizio 8

Data la funzione $y = |\sin x|$, $\sin x$ esiste per ogni x e il valore assoluto non richiede condizioni di esistenza → la funzione in esame esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$. $D = \mathbb{R}$.

esercizi di base

Svolgimento esercizio 9

Per la funzione $y = \frac{\sqrt{x}}{|x-2|}$ dobbiamo considerare le condizioni dell'esistenza della radice quadrata e e del denominatore diverso da zero:

$\begin{cases} x \geq 0 \\ |x-2| \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \rightarrow 0 \leq x < 2 \vee x > 2 \rightarrow D = [0;2) \cup (2;+\infty)$.

esercizi di base

Svolgimento esercizio 10

Per la funzione $y = \ln(x^2 - 3x)$ dobbiamo porre la condizione di esistenza de logaritmo:

$x^2 - 3x > 0 \rightarrow x < 0 \vee x > 3 \rightarrow D = (-\infty;0) \cup (3;+\infty)$.

esercizi di base

Svolgimento esercizio 11

Per la funzione $y=\cot(\pi x)$ dobbiamo porre la condizione di esistenza della cotangente:

$\pi x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \rightarrow \ x \neq k,\ k \in \mathbb{Z} \ \rightarrow \ D=\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

esercizi di base

Svolgimento esercizio 12

Per la funzione $\arccos(x^2-3)$ dobbiamo porre la condizione di esistenza dell'arcocoseno:

$-1 \leq x^2-3 \leq 1 \ \rightarrow \ \begin{cases} x^2-3 \geq -1 \\ x^2-3 \leq 1 \end{cases} \ \rightarrow \ \begin{cases} x^2 \geq 2 \\ x^2 \leq 4 \end{cases} \ \rightarrow \ \begin{cases} x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \ \rightarrow$

$-2 \leq x \leq -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} \leq x \leq 2 \ \rightarrow \ D=[-2;-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2};2]$.

esercizi di base

ESERCIZI

indice

Svolgere da ciascuno dei seguenti esercizi, controllando i risultati e gli svolgimenti proposti dal testo.

13) $y=\arctan\dfrac{x^3-x+3}{x^2}$	risultato esercizio 13	svolgimento esercizio 13
14) $y=\dfrac{\log_{0.5}x}{\log_{0.5}x-1}$	risultato esercizio 14	svolgimento esercizio 14
15) $y=\dfrac{x+3}{2-\sqrt{x-1}}$	risultato esercizio 15	svolgimento esercizio 15
16) $y=(2-x)^{(1-\sqrt{x})}$	risultato esercizio 16	svolgimento esercizio 16
17) $y=\log_2\lvert 3-x\rvert$	risultato esercizio 17	svolgimento esercizio 17
18) $y=\ln(\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1)$	risultato esercizio 18	svolgimento esercizio 18
19) $y=\ln(\ln(x))$	risultato esercizio 19	svolgimento esercizio 19
20) $y=\ln^2 x$	risultato esercizio 20	svolgimento esercizio 20
21) $y=\log_x(2-x)$	risultato esercizio 21	svolgimento esercizio 21

22) $y=\log_x\lvert 2-x\rvert$	risultato esercizio 22	svolgimento esercizio 22
23) $y=\sqrt{\tan x}$	risultato esercizio 23	svolgimento esercizio 23
24) $y=\frac{\sqrt{2-4^x}}{4^x-2^x}$	risultato esercizio 24	svolgimento esercizio 24
25) $y=\frac{4^x-2^x}{\sqrt{2-4^x}}$	risultato esercizio 25	svolgimento eseserczio 25
26) $y=\frac{\sqrt{\ln x}}{2\ln x-5}$	risultato esercizio 26	svolgimento esercizio 26
27) $y=\frac{\sqrt{\log_{0.5}x}}{2\sqrt{\log_{0.5}x}-5}$	risultato esercizio 27	svolgimento esercizio 27
28) $y=\arcsin\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)$	risultato esercizio 28	svolgimento esercizio 28
29) $y=\arcsin x-\arccos\left(1-2x^2\right)$	risultato esercizio 29	svolgimento esercizio 29
30) $y=\ln\left(\sqrt{x+1}-(x-1)\right)$	risultato esercizio 30	svolgimento esercizio 30
31) $y=\frac{\sin x}{\sin 2x}$	risultato esercizio 31	svolgimento esercizio 31
32) $y=\frac{x^2-\sin x}{x^2-\cos x}$	risultato esercizio 32	svolgimento esercizio 32

RISULTATI DEGLI ESERCIZI

indice

Risultato esercizio 13

La funzione $y = \arctan \frac{x^3 - x + 3}{x^2}$ esiste per $x \neq 0$. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

svolgimento esercizio 13 esercizi

Risultato esercizio 14

La funzione $y = \frac{\log_{0.5} x}{\log_{0.5} x - 1}$ esiste per $0 < x < 0.5 \vee x > 0$. $D = (0; 0.5) \cup (0.5; +\infty)$.

svolgimento esercizio 14 esercizi

Risultato esercizio 15

La funzione $y = \frac{x+3}{2 - \sqrt{x-1}}$ esiste $1 \leq x < 5 \vee x > 5$. $D = [1; 5) \cup (5; +\infty)$.

svolgimento esercizio 15 esercizi

Risultato esercizio 16

La funzione $y = (2-x)^{(1-\sqrt{x})}$ esiste per $0 \leq x < 2$. $D = [0; 2)$.

svolgimento esercizio 16 esercizi

Risultato esercizio 17

La funzione $y = \log_2 |3-x|$ esiste per $x \neq 3$. $D = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

svolgimento esercizio 17 esercizi

Risultato esercizio 18

La funzione $y=\ln\left(e^{2x}-2e^{x}+1\right)$ esiste per $x\neq 0$. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

svolgimento esercizio 18 esercizi

Risultato esercizio 19

La funzione $y=\ln(\ln(x))$ esiste per $x>1$. $D=(1;+\infty)$.

svolgimento esercizio 19 esercizi

Risultato esercizio 20

La funzione $y=\ln^2 x$ esiste per $x>0$. $D=(0;+\infty)$.

svolgimento esercizio 20 esercizi

Risultato esercizio 21

La funzione $y=\log_x(2-x)$ esiste per $0<x<1\vee 1<x<2$. $D=(0;1)\cup(1;2)$.

svolgimento esercizio 21 esercizi

Risultato esercizio 22

La funzione $y=\log_x|2-x|$ esiste per $0<x<1\vee 1<x<2\vee x>2$.

$D=(0;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$.

svolgimento esercizio 22 esercizi

Risultato esercizio 23

La funzione $y=\sqrt{\tan x}$ esiste per $0+k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

svolgimento esercizio 23 esercizi

Risultato esercizio 24

La funzione $y=\frac{\sqrt{2-4^x}}{4^x-2^x}$ esiste per $x<0\vee 0<x\leq\frac{1}{2}$. $D=(-\infty;0)\cup(0;\frac{1}{2}]$.

esercizi

Risultato esercizio 25

La funzione $y=\frac{4^x-2^x}{\sqrt{2-4^x}}$ esiste per $x<\frac{1}{2}$. $D=(-\infty;\frac{1}{2})$.

esercizi

Risultato esercizio 26

La funzione $y=\frac{\sqrt{\ln x}}{2\ln x-5}$ esiste per $x\geq 1\wedge x\neq e^{\frac{5}{2}}$. $D=[1;e^{\frac{5}{2}})\cup(e^{\frac{5}{2}};+\infty)$.

esercizi

Risultato esercizio 27

La funzione $y=\frac{\sqrt{\log_{0.5}x}}{2\sqrt{\log_{0.5}x}-5}$ esiste per $0<x<0.5^{\frac{25}{4}}\vee 0.5^{\frac{25}{4}}<x\leq 1$.

$D=(0;0.5^{\frac{25}{4}})\cup(0.5^{\frac{25}{4}};1]$. esercizi

Risultato esercizio 28

La funzione $y=\arcsin(\log_{\frac{1}{2}} x)$ esiste per $\frac{1}{2}\le x\le 2$. $D=[\frac{1}{2};2]$.

esercizi

Risultato esercizio 29

La funzione $y=\arcsin x-\arccos(1-2x^2)$ esiste per $-1\le x\le 1$. $D=[-1;1]$.

esercizi

Risultato esercizio 30

La funzione $y=\ln(\sqrt{x+1}-(x-1))$ esiste per $-1\le x<3$. $D=[-1;3)$.

esercizi

Risultato esercizio 31

La funzione $y=\frac{\sin x}{\sin 2x}$ esiste per $x\ne k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. $\mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\}$

esercizi

Risultato esercizio 32

La funzione $y=\frac{x^2-\sin x}{x^2-\cos x}$ esiste per $x\ne\pm\alpha$ con $\alpha\approx 0.8241$.

esercizi

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

indice

Svolgimento esercizio 13

La funzione $y=\arctan\frac{x^3-x+3}{x^2}$ è composta nel seguente modo:

$$x \overset{frazione}{\rightarrow} \frac{x^3-x+3}{x^2} \overset{arcotangente}{\rightarrow} \arctan\frac{x^3-x+3}{x^2} \quad .$$

L'arcotangente esiste sempre (se esiste l'argomento), quindi l'unica condizione è relativa all'esistenza della frazione: $\text{denominatore} \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \rightarrow$

$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

esercizi

Svolgimento esercizio 14

La funzione $y=\frac{\log_{0.5}x}{\log_{0.5}x-1}$ è costituita dal rapporto di due espressioni, in cui compare lo stesso logaritmo. Dobbiamo quindi considerare l'esistenza di questo logaritmo e porre il denominatore della frazione diverso da zero.

$$\begin{cases} x>0 & \text{esistenza logaritmo} \\ \log_{0,5}x-1\neq 0 & \text{denominatore}\neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_{0.5}x\neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_{0.5}x\neq \log_{0.5}0.5 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 0.5 \end{cases} \rightarrow 0<x<0.5 \vee x>0 \rightarrow D=(0;0.5)\cup(0.5;+\infty) \quad .$$

esercizi

Svolgimento esercizio 15

La funzione $y=\dfrac{x+3}{2-\sqrt{x-1}}$ è costituita dal rapporto di due espressioni e nel denominatore compare una radice quadrata.

$$\begin{cases} x-1\geq 0 & \text{esistenza radice} \\ 2-\sqrt{x-1}\neq 0 & \text{denominatore}\neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ \sqrt{x-1}\neq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x-1\neq 4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ x\neq 5 \end{cases} \rightarrow 1\leq x<5 \vee x>5 \rightarrow D=[1;5)\cup(5;+\infty) \;.$$

esercizi

Svolgimento esercizio 16

La funzione $y=(2-x)^{(1-\sqrt{x})}$ è un'esponenziale con base variabile. La base è un polinomio, l'esponente contiene una radice quadrata.

$$\begin{cases} 2-x>0 & \text{cond. base esponenziale} \\ x\geq 0 & \text{esistenza radice} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\geq 0 \end{cases} \rightarrow 0\leq x<2 \rightarrow D=[0;2) \;.$$

esercizi

Svolgimento esercizio 17

Lo schema di composizione della funzione $y=\log_2|3-x|$ è:

$$x \overset{polinomio}{\rightarrow} 3-x \overset{valore\,assoluto}{\rightarrow} |3-x| \overset{logaritmo}{\rightarrow} \log_2|3-x| \;.$$

Polinomio e valore assoluto di polinomio non richiedono condizioni, quindi dobbiamo porre solo la condizione di esistenza del logaritmo:

$$|3-x|>0 \rightarrow 3-x\neq 0 \rightarrow x\neq 3 \rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{3\}=(-\infty;3)\cup(3;+\infty) \;.$$

esercizi

Svolgimento esercizio 18

Data la funzione $y=\ln\left(e^{2x}-2e^{x}+1\right)$, i due esponenziali esistono per ogni *x*, quindi dobbiamo porre solo la condizione di esistenza del logaritmo:

$e^{2x}-2e^{x}+1>0 \;\rightarrow\; (e^{x}-1)^{2}>0 \;\rightarrow\; e^{x}-1\neq 0 \;\rightarrow\; e^{x}\neq 1 \;\rightarrow\; e^{x}\neq e^{0} \;\rightarrow\; x\neq 0 \;\rightarrow$

$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

esercizi

Svolgimento esercizio 19

Lo schema di composizione della funzione $y=\ln(\ln(x))$ è :

$x \overset{logaritmo}{\rightarrow} \ln x \overset{logaritmo}{\rightarrow} \ln(\ln x)$.

Dobbiamo porre le condizioni di esistenza dei due logartimi

$\begin{cases} x>0 & \text{esistenza primo logaritmo} \\ \ln x>0 & \text{esistenza secondo logaritmo} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x>\ln 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow x>1 \rightarrow$

$D=(1;+\infty)$.

esercizi

Svolgimento esercizio 20

Lo schema di composizione della funzione $y=\ln^{2}x$ è:

$x \overset{logaritmo}{\rightarrow} \ln x \overset{quadrato}{\rightarrow} (\ln x)^{2}$.

L'unica condizione che dobbiamo porre è quella relativa all'esistenza del logaritmo (il quadrato esiste sempre se esiste la sua base): $x>0 \rightarrow D=(0;+\infty)$.

esercizi

Svolgimento esercizio 21

La funzione $y=\log_x(2-x)$ è un logaritmo, a base variabile, di un polinomio.

$$\begin{cases} x>0 \wedge x\neq 1 & \text{cond. base logaritmo} \\ 2-x>0 & \text{cond. argomento logaritmo} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \wedge x\neq 1 \\ x<2 \end{cases} \rightarrow 0<x<1 \vee 1<x<2 \rightarrow$$

$D=(0;1)\cup(1;2)$.

esercizi

Svolgimento esercizio 22

La funzione $y=\log_x|2-x|$ è un logaritmo a base variabile.

$$\begin{cases} x>0 \wedge x\neq 1 & \text{cond. base logaritmo} \\ |2-x|>0 & \text{cond. argomento logaritmo} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \wedge x\neq 1 \\ 2-x\neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \wedge x\neq 1 \\ x\neq 2 \end{cases} \rightarrow$$

$0<x<1 \vee 1<x<2 \vee x>2 \rightarrow D=(0;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$.

esercizi

Svolgimento esercizio 23

Lo schema di composizione della funzione $y=\sqrt{\tan x}$ è:

$$x \xrightarrow{tangente} \tan x \xrightarrow{radice\ quadrata} \sqrt{\tan x} .$$

$$\begin{cases} x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \ k\in\mathbb{Z} & \text{esistenza tangente} \\ \tan x\geq 0 & \text{cond. esistenza radice} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \ k\in\mathbb{Z} \\ 0+k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow$$

$0+k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$. $D=\{x \mid k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\}$

video tan(x)>=0

esercizi

Svolgimento esercizio 24

La funzione $y=\frac{\sqrt{2-4^x}}{4^x-2^x}$ è il rapporto di due espressioni e il numeratore presenta una radice quadrata. Gli esponenziali presenti esistono per ogni x.

$$\begin{cases} 2-4^x \geq 0 & \text{esistenza radice quadrata} \\ 4^x-2^x \neq 0 & \text{denominatore diverso da zero} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4^x \leq 2 \\ 4^x \neq 2^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{2x} \leq 2^1 \\ 2^{2x} \neq 2^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \leq 1 \\ 2x \neq x \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \rightarrow x<0 \vee 0<x \leq \frac{1}{2} \rightarrow D=(-\infty;0) \cup (0;\frac{1}{2}] \ .$$

esercizi

Svolgimento eseserczio 25

La funzione $y=\frac{4^x-2^x}{\sqrt{2-4^x}}$ è il rapporto di due espressioni e il denominatore presenta una radice quadrata. Gli esponenziali presenti esistono per ogni x.

$$\begin{cases} 2-4^x \geq 0 & \text{esistenza radice quadrata} \\ 2-4^x \neq 0 & \text{condizione denominatore} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2-4^x \geq 0 \\ 2-4^x \neq 0 \end{cases} \rightarrow 2-4^x>0 \rightarrow 4^x<2 \rightarrow$$

$$2^{2x}<2^1 \rightarrow 2x<1 \rightarrow x<\frac{1}{2} \rightarrow D=(-\infty;\frac{1}{2}) \ .$$

esercizi

Svolgimento esercizio 26

La funzione $y=\frac{\sqrt{\ln x}}{2\ln x-5}$ è il rapporto di due espressioni, il denominatore presenta una radice quadrata e compare due volte $\ln x$.

$$\begin{cases} x>0 & \text{condizione esistenza logaritmo} \\ \ln x \geq 0 & \text{condizione esistenza radice} \\ 2\ln x-5 \neq 0 & \text{condizione denominatore} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x \geq \ln 1 \\ \ln x \neq \frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \geq 1 \\ \ln x \neq \frac{5}{2}\ln e \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x \geq 1 \\ \ln x \neq \ln e^{\frac{5}{2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \geq 1 \\ x \neq e^{\frac{5}{2}} \approx 12.18 \end{cases} \rightarrow x \geq 1 \wedge x \neq e^{\frac{5}{2}} \rightarrow D=[1;e^{\frac{5}{2}}) \cup (e^{\frac{5}{2}};+\infty) \; .$$

esercizi

Svolgimento esercizio 27

La funzione $y=\frac{\sqrt{\log_{0.5}x}}{2\sqrt{\log_{0.5}x}-5}$ è un rapporto e compare due volte $\sqrt{\log_{0.5}x}$.

$$\begin{cases} x>0 & \text{condizione esistenza logaritmo} \\ \log_{0.5}x \geq 0 & \text{condizione esistenza radice} \\ 2\sqrt{\log_{0.5}x}-5 \neq 0 & \text{condizione denominatore} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_{0.5}x \geq \log_{0.5}1 \\ \sqrt{\log_{0.5}x} \neq \frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x \leq 1 & \text{(base minore di 1)} \\ \log_{0.5}x \neq \frac{25}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \leq 1 \\ \log_{0.5}x \neq \frac{25}{4}\log_{0.5}0.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \leq 1 \\ \log_{0.5}x \neq \log_{0.5}0.5^{\frac{25}{4}} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x \leq 1 \\ x \neq 0.5^{\frac{25}{4}} \approx 0{,}013 \end{cases} \rightarrow 0<x<0.5^{\frac{25}{4}} \vee 0.5^{\frac{25}{4}}<x \leq 1 \rightarrow D=(0;0.5^{\frac{25}{4}}) \cup (0.5^{\frac{25}{4}};1] \; .$$

esercizi

Svolgimento esercizio 28

Lo schema di composizione della funzione $y=\arcsin(\log_{\frac{1}{2}} x)$ è:

$$x \xrightarrow{logaritmo} \log_{\frac{1}{2}} x \xrightarrow{arcoseno} \arcsin(\log_{\frac{1}{2}} x) \quad .$$

$$\begin{cases} x>0 & \text{esistenza logaritmo} \\ -1\le \log_{\frac{1}{2}} x \le 1 & \text{condizione arcoseno} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \ge -1 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \le 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \ge -\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \\ \log_{\frac{1}{2}} x \le \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \ge \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^{-1} \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \le (\frac{1}{2})^{-1} \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\le 2 \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2} \le x \le 2 \rightarrow D=[\frac{1}{2};2] \quad .$$

esercizi

Svolgimento esercizio 29

E' data la funzione $y=\arcsin x-\arccos(1-2x^2)$.

$$\begin{cases} -1\le x\le 1 & \text{esistenza arcoseno} \\ -1\le 1-2x^2 \le 1 & \text{esistenza arcocoseno} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 1-2x^2 \ge -1 \\ 1-2x^2 \le 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -2x^2 \ge -2 \\ -2x^2 \le 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x^2 \le 1 \\ x^2 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -1\le x\le 1 \\ \forall x\in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow -1\le x\le 1 \rightarrow D=[-1;1] \quad .$$

esercizi

Svolgimento esercizio 30

E' data la funzione $y=\ln\left(\sqrt{x+1}-(x-1)\right)$.

$$\begin{cases} x+1\geq 0 & \text{esistenza radice qu.} \\ \sqrt{x+1}-(x-1)>0 & \text{esistenza logaritmo} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ \sqrt{x+1}>x-1 \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \quad \sqrt{x+1}>x-1 \rightarrow \begin{cases} x-1<0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x+1>(x-1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x\geq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x\geq 1 \\ x+1>x^2+1-2x \end{cases} \rightarrow$$

$$-1\leq x<1 \vee \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-3x<0 \end{cases} \rightarrow -1\leq x<1 \vee \begin{cases} x\geq 1 \\ 0<x<3 \end{cases} \rightarrow -1\leq x<1 \vee 1\leq x<3 \rightarrow$$

$$-1\leq x<3$$

Riprendiamo il sistema iniziale $\begin{cases} x\geq -1 \\ -1\leq x<3 \end{cases} \rightarrow -1\leq x<3 \rightarrow D=[-1;3)$.

esercizi

Svolgimento esercizio 31

La funzione $y=\frac{\sin x}{\sin 2x}$ è il rapporto di due espressioni. L'unica condizione che dobbiamo porre è la condizione del denominatore:

$$\sin 2x\neq 0 \rightarrow 2x\neq k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \rightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}, \quad k\in\mathbb{Z} \;. \quad D=\mathbb{R}\setminus\{x=k\frac{\pi}{2}, \quad k\in\mathbb{Z}\}$$

Osservazione. <u>Non</u> è <u>corretto</u> il seguente procedimento:

$y=\frac{\sin x}{\sin 2x} \rightarrow y=\frac{\cancel{\sin x}}{2\cancel{\sin x}\cos x} \rightarrow y=\frac{1}{\cos x} \rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$, perché <u>non</u> si può semplificare prima di porre le condizioni di esistenza.

esercizi

Svolgimento esercizio 32

La funzione $y=\frac{x^2-\sin x}{x^2-\cos x}$ è il rapporto di due espressioni. L'unica condizione che dobbiamo porre è la condizione del denominatore:

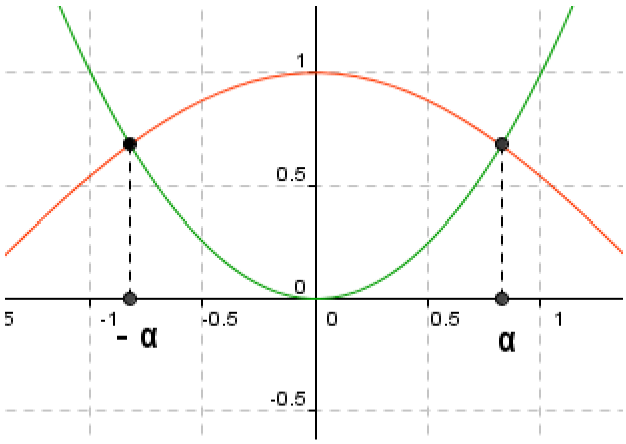
$x^2-\cos x\neq 0 \quad \rightarrow \quad \cos x\neq x^2$.

Risolviamo l'equazione associata $\cos x=x^2$ con un metodo grafico:

video metodo grafico

$\begin{cases} y=\cos x \\ y=x^2 \end{cases}$

$x=\alpha\,,\quad \alpha\simeq 0.8241$



Quindi la funzione esiste per $x\neq\pm\alpha$ con $\alpha\approx 0.8241$.

esercizi